

地基与基础梁相互作用的 FEM-BEM 解法^{*}

张 树 传

(厦门市建筑设计院, 厦门 361003)

摘要 充分发挥边界元和有限元的优点, 利用有限元模拟有限区域, 引入二次曲线元和无穷边界元来模拟无限边界区域. 建立有限元-边界元(FEM-BEM)耦合模型, 分析了在均布荷载作用下半无限地基与基础梁之间的相互作用.

关键词 有限元-边界元耦合模型, 地基, 基础梁

分类号 TU 430.7

有限元法对求解问题采取区域离散和分片插值技术, 能够较好地适应有限域中复杂多变的几何形状和物理性质. 但有限元法要对全域进行剖分, 这对工程中常遇到的无限域、半无限域问题处理方法不是很好. 而边界元法的基本解适用于无限域或半无限域, 其基本解自动满足边界条件, 对大体积域问题, 只需对边界面进行较少的离散就可得到较精确的结果. 另外, 边界元可将所研究的问题维数降低一维, 给计算带来了很大方便. 本文充分发挥边界元和有限元的优点, 将两者耦合起来, 利用边界元求解无限域, 用有限元来求解有限区域, 对基础梁与半无限地基之间的相互作用进行分析.

1 边界元积分方程的建立

1.1 边界单元

为了更好地模拟无限区域及与有限单元进行耦合, 在本文中引入二次曲线单元和无穷边界单元对无限区域进行边界离散.

1.1.1 二次曲线单元 图 1 为二次曲线单元及其母单元, 二次曲线单元的插值函数为

$$N_1(\xi) = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi); N_2(\xi) = (1+\xi)(1-\xi); N_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(1+\xi). \quad (1)$$

1.1.2 无穷边界单元 根据文[1], 取图 2 所示的两类无穷边界单元, 其坐标、位移和面力形函数可分别由文[1]得到, 这里因篇幅关系, 不再引述.

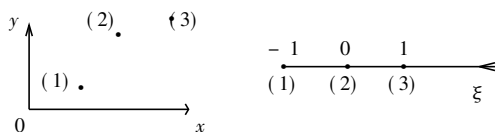


图1 二次曲线元及其母单元

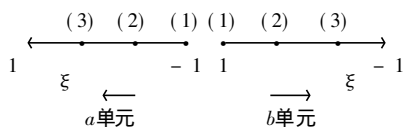


图2 两类无穷边界元及其局部坐标

1.2 无界域的边界积分方程的建立

考虑图3所示具有一般性的弹性楔形平面无界域问题,将无限区域认为是由有限边界 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_\infty$ 几部分边界围成的有限域在 $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_\infty$ 趋于无穷远时的极限。

由文[1]可得此类问题的边界积分方程为

$$\begin{aligned} C_{ki} V_i(P) + \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} V_i(Q) p_{ki}^*(P, Q) d\Gamma(Q) + C_{ki} U_{oi} \\ = \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} T_i(Q) u_{ki}^*(P, Q) d\Gamma(Q), \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $u_{ik}^*(P, Q), p_{ik}^*(P, Q)$ 为 Kelvin 基本解。

$$\left. \begin{aligned} u_{ik}^*(P, Q) &= \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{ik} + r_{,i} r_{,k} \right], \\ p_{ik}^*(P, Q) &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left[(1-2\nu) \delta_{ik} + 2r_{,i} r_{,k} \right] - (1-2\nu)(r_{,im} n_k - r_{,kn} m_i) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中 r 为点 P, Q 之间的距离。

$$C_{ki} = - \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \times \begin{bmatrix} 2(1-\nu)(\theta_2 + \theta_1) + \frac{1}{2}(\sin 2\theta_2 + \sin 2\theta_1) & \sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1 \\ \sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1 & 2(1-\nu)(\theta_2 + \theta_1) - \frac{1}{2}(\sin 2\theta_2 + \sin 2\theta_1) \end{bmatrix}.$$

基于上面的任意平面无界域弹性问题的边界积分方程式(2),对有限边界 Γ_1 离散成若干个二次曲线单元。对 Γ_2, Γ_3 引入无穷边界单元,可以得出相应的各系数矩阵组成的线性方程组^[1],即 $HV + Cd = GT$ 。利用刚体位移解和间接法最终可求出我们所熟悉的矩阵方程^[1]为

$$HU = GT. \quad (4)$$

2 有限元平衡方程

结构的有限元平衡方程为^[2]

$$K\delta = P, \quad (5)$$

其中 K 为结构总体刚度矩阵; P 为结构的荷载列阵; δ 为结构的位移列阵。

3 有限元-边界元耦合方程的建立

如图4所示,区域 Ω 由两个子域 Ω^B 和 Ω^F 组成。 Γ_B^B 和 Γ_F^B 表示边界元子域自由边界和与有限元交接边界, Γ_B^F 和 Γ_F^F 表示有限元子域的自由边界和与边界元的交接边界。

式(4)经变化,得 $G^{-1}HU = T$ 。令 $G^{-1}H = AH$,则可表示为 $AH \cdot U = T$ 。将式中的矩阵 AH, U 和 T 按与有限元交接的边界结点和非交接的边界结点重新排列,可表示为

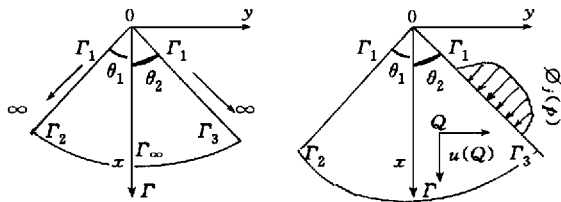


图3 任意平面无界域

$$\begin{bmatrix} AH_{oo} & AH_{oB} \\ AH_{Bo} & AH_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_o \\ U_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_o \\ T_B \end{Bmatrix}; \tag{6}$$

同样按交接部分和非交接部分重新排列式(5),得

$$\begin{bmatrix} K_{oo} & K_{oF} \\ K_{Fo} & K_{FF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_o \\ \delta_F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_o \\ P_F \end{Bmatrix}. \tag{7}$$

根据有限元和边界元交接边界上结点位移相等, 结点力大小相等方向相反的条件, 即 $U_o = \delta_o, T_o = -P_o$, 将式(6),(7)化简为

图 4 有限元与边界元子域

$$\begin{bmatrix} K_{FF} & K_{oo} & 0 \\ K_{oF} & K_{oo} + AH_{oo} & AH_{oB} \\ 0 & AH_{Bo} & AH_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_F \\ \delta_o \\ U_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_F \\ 0 \\ T_B \end{Bmatrix}, \tag{8}$$

上式即为 FEM-BEM 耦合方程.

4 基础梁与地基的相互作用

4.1 计算算例

如图 5 所示, 置于半无限弹性地基上的基础梁^[1], 梁长 12 m, 高 2 m, 剪切模量 $G_1 = 7.500 \times 10^3$ MPa, 泊松比 $\nu_1 = 0.2$, 剪切模量 $G_2 = 3.846 \times 10^3$ MPa, 泊松比 $\nu_2 = 0.3$, 基础梁受竖向均布荷载 $q = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$. 本文选取计算模型如图 6 所示, 将基础梁分成 60 个 $1.0 \text{ m} \times 0.4 \text{ m}$ 的有限单元. 地基除与基础梁交接处划分成 12 个与有限单元耦合的边界单元外, 在基础梁两边各取 5 个边界元和 1 个无穷边界元. 计算结果如附表所示, 与附表中列出了文 [1] 的计算结果十分接近, 这说明本文方法是可靠的、精度是好的.

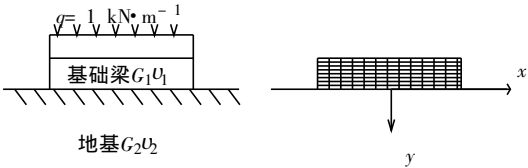


图 5 半无限地基上基础梁

图 6 计算模型

附表 半无限地基上基础梁基底反力 ($\text{kN} \cdot \text{m}^{-1}$)

座标 x/m	0	1	2	3	4	5	6
文 [2] 方法 1	0.936 8	0.930 4	0.910 1	0.876 7	0.864 9	0.630 9	2.594 9
文 [2] 方法 2	0.937 8	0.931 7	0.912 4	0.877 0	0.880 1	0.625 5	2.595 4
本文方法	0.938 8	0.929 3	0.905 9	0.871 5	0.854 4	0.641 2	2.608 5

4.2 柔性指数变化的影响

柔性指数 t 是指基础梁相对于地基的刚度, 反映了基础梁和土之间的刚度特性^[6], 即

$$t = 3\pi \frac{E_s(1 - \nu_s^2)}{E_l(1 - \nu_l^2)} \left(\frac{l}{h} \right)^3, \tag{9}$$

式中 E_s, ν_s 为土的切线模量和泊松比; E_l, ν_l 为基础梁的弹性模量和泊松比; h 为基础梁高; $2l$ 为基础梁长.

柔性指数(t)的变化对基底的反力和位移都有一定的影响. 本节考虑图 5 所示的结构和荷载形式, 仍采用图 6 所示的计算模型分析柔性指数的变化对基底反力和位移的影响.

4.2.1 柔性指数变化对基底反力的影响 如图 7 所示, 当柔性指数较小(也即基础梁相对于地基刚度比较大)时, 基底反力较集中于基底边缘. 随着柔性指数的增大, 基底边缘处的反力逐

渐减小,而基底中部反力逐渐增加,基底反力分布逐渐变得缓和,变得比较均匀。

4.2.2 柔性指数变化对基底位移的影响 如图8所示,当柔性指数较小时,基底位移比较平缓;当柔性指数越来越大时,也即基础梁相对地基越来越柔时,基底中部位移逐渐增加,而两端

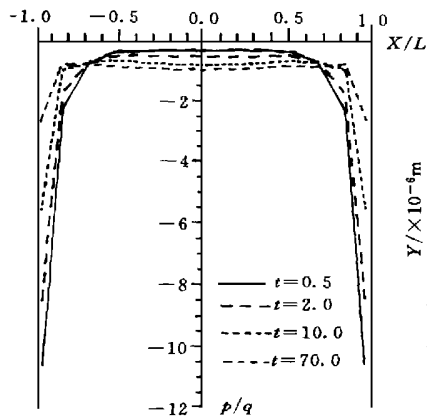


图7 柔性指数对基底反力的影响

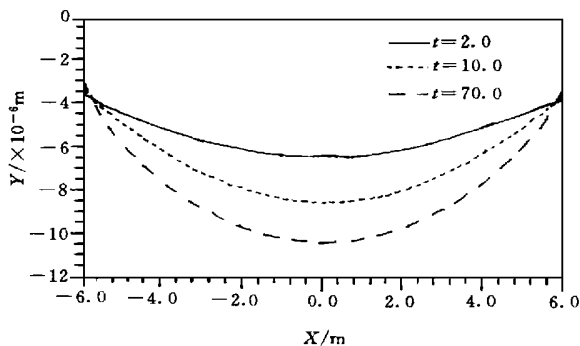


图8 柔性指数变化对基底位移的影响

位移变化较小,显示出基础梁的柔性。

参 考 文 献

- 1 林建华,施景勋. 任意形状弹性地基问题的无穷边界单元法. 岩土工程学报, 1993, 15(6): 44~52
- 2 王勖成,邵敏. 有限单元法基本原理与数值方法. 北京:清华大学出版社, 1988. 1~156
- 3 宰金珉,宰金璋. 高层建筑基础分析与设计——土与结构共同作用的理论与应用. 北京:中国建筑工业出版社, 1994. 77~78

Finite Element and Boundary Element Method for Solving the Interaction of Foundation Ground and Foundation Beam

Zhang Shuchuan

(Xiamen Inst. of Arch. Design, 361003, Xiamen)

Abstract A coupling finite element and boundary element model is established and the interaction of foundation ground and foundation beam is analyzed under uniformly distributed loading. In the modeling, the strongpoints of finite element and boundary element are given full play; the infinite area is simulated by applying finite element; and the infinite boundary area is simulated by introducing conic element and infinite boundary element.

Keywords coupling model of finite element and boundary element, foundation ground, foundation beam