第19卷 第3期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.19 No.3
1998年7月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jul.1998

具有非负载面曲率的紧致极小超曲面*

王银河[①] 王文丽[②]

(① 内蒙古师范大学数学系, ② 内蒙古师范大学计算机科学系, 呼和浩特 010022)

摘要 采用活动标架方法, 讨论局部对称黎曼流形中, 具有非负截面曲率的紧致极小超曲面, 得到一个关于这种超曲面不存在的定理.

关键词 局部对称, 截面曲率, 紧致

分类号 O 186.12

1 主要结果和预备知识

众所周知, 带有非正截面曲率的单连通黎曼流形中不存在紧致极小子流形. 本文讨论单连通局部对称黎曼流形中的紧致极小超曲面, 下面具体阐述.

定理1 设 N 是 $n+1$ 维单连通局部对称黎曼流形($n\geq 2$), 则 N 中不存在处处满足 $S>n\tilde{X}$ 的具有非负截面曲率的紧致极小超曲面. 这里 $\tilde{X}$ 表示 N 在任一点处截面曲率的上确界, 即 $\tilde{X}>0$. S 表示 N 的超曲面的第二基本形式长度平方.

推论1 球面 $S^{n+1}(1)$ $(n\geq 2)$ 中, 不存在恒满足 $S>n$ 的具有非负截面曲率的紧致极小超曲面.

在 $S^{n+1}(1)$ 中的紧致极小超曲面的第二间隙(用第二基本形式长度平方刻划的)中, 只可能存在具有负值截面曲率的紧致极小超曲面. 下面给出证明定理1所需要的局部公式和引理.

设 N 是 $n+1$ 维局部对称黎曼流形, M 为 N 的紧致极小超曲面. 指标约定: $1\leq i,j,k,l,m\leq n$, $\alpha=n+1$.

在 N 上选取一个局部正交规范标架场 $\{\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_\alpha\}$, 使得当限制在 M 上时, $\boldsymbol{e}_i$ 与 M 相切. 设 $\{\omega,\omega_\alpha\}$ 是 $\{\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_\alpha\}$ 的对偶标架场, 则限制在 M 上时, $\omega_\alpha=0$, $\omega_{\alpha i}=\sum_j h_{ij}^\alpha\omega_j$, $h_{ij}^\alpha=h_{ji}^\alpha$. M 在 N 中的第二基本形式为

$$\sigma(X,Y)=\sum_{i,j}h_{ij}^\alpha\omega(X)\omega(Y)\boldsymbol{e}_\alpha,\quad \forall X,\quad Y\in TM, \tag{1}$$

其长度平方 $S=\sum_{i,j}(h_{ij}^\alpha)^2$、平均曲率 $H=\dfrac{1}{n}\sum_i h_{ii}^\alpha$ 和 $H\equiv 0$ 时, M 称为极小的. M 的 Gauss 方程为

$$R_{ijkl}=K_{ijkl}+h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha-h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha,$$

其中 R_{ijkl}, K_{ijkl} 分别表示 M, N 的黎曼曲率张量分量.

M 的第二基本形式分量 h_{ij}^α 的第一、二阶协变导数分别定义为 $\sum_k h_{ijk}^\alpha\omega_k=\mathrm{d}h_{ij}^\alpha-\sum_l h_{lj}^\alpha\omega_{li}-\sum_l h_{il}^\alpha$

* 本文 1998-04-21 收到; 内蒙古自治区自然科学基金资助项目

ω_j, $\sum_l h^\alpha_{ijkl}\omega_l = \mathrm{d}h^\alpha_{ijk} - \sum_l h^\alpha_{ljk}\omega_{li} - \sum_l h^\alpha_{ilk}\omega_{lj} - \sum_l h^\alpha_{ijl}\omega_{lk}$. 由上述定义和 M 的结构方程, 容易导出

$$h^\alpha_{ijk} - h^\alpha_{ikj} = -K_{\alpha ijk}, \tag{2}$$

$$h^\alpha_{ijkl} - h^\alpha_{ijlk} = \sum_m h^\alpha_{mi}R_{mjkl} + \sum_m h^\alpha_{mj}R_{mikl}. \tag{3}$$

h^α_{ij}的 Laplacian 定义为

$$\Delta h^\alpha_{ij} = \sum_k h^\alpha_{ijkk}. \tag{4}$$

同样, 可以定义 $K_{\alpha ijk}$的协变导数(作为 $T^\perp \leftarrow T^* \leftarrow T^* \leftarrow T^*$ 的一个截面而言) 为

$$\sum_l K_{\alpha ijkl}\omega_l = \mathrm{d}K_{\alpha ijk} - \sum_l K_{\alpha ljk}\omega_{li} - \sum_l K_{\alpha ilk}\omega_{lj} - \sum_l K_{\alpha ijl}\omega_{lk}.$$

通常的协变导数 $K_{\alpha ijk,l}$与 $K_{\alpha ijkl}$有如下关系[1], 即

$$K_{\alpha ijk,l} = K_{\alpha ijkl} - K_{\alpha i\alpha k}h^\alpha_{jl} - K_{\alpha ij\alpha}h^\alpha_{kl} + \sum_m K_{mijk}h^\alpha_{ml}. \tag{5}$$

由式(2) ～(4) , 可以导出

$$\Delta h^\alpha_{ij} = -\sum_k (K_{\alpha kikj} + K_{\alpha ijkk}) + \sum_{km} h^\alpha_{km}R_{mijk} + \sum_{km} h^\alpha_{mi}R_{mkjk}. \tag{6}$$

当 N 是局部对称时, $K_{\alpha ijk,l} = 0$. 由式(5) , (6) 可以推出

引理 1　设 N 是 $n+1$ 维局部对称黎曼流形, M 是 N 的紧致极小超曲面, 则

$$\Delta h^\alpha_{ij} = -\sum_k [K_{\alpha k\alpha k}h^\alpha_{ij} + K_{\alpha ki\alpha}h^\alpha_{kj} + K_{\alpha i\alpha k}h^\alpha_{jk} + K_{\alpha j\alpha i}h^\alpha_{kk}]$$
$$+ \sum_{km}(K_{mkik}h^\alpha_{mj} + K_{mijk}h^\alpha_{mk}) + \sum_{km} h^\alpha_{mk}R_{mijk} + \sum_{km} h^\alpha_{mi}R_{mkjk}.$$

令 $UM = \bigcup_{x\in M} UM_x$ 和 $UM_x = \{\boldsymbol{u}\in TM_x : \|\boldsymbol{u}\| = 1\}$, 从而 $UM \to M$ 是 M 上单位切丛. 定义函数 $f: UM \to R$ 为 $f(\boldsymbol{u}) = \|Q(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})\|^2$, $\forall\, \boldsymbol{u}\in UM$. 设 $\boldsymbol{u} = \sum_i u^i\boldsymbol{e}_i$, 由式(1) 得

$$f(\boldsymbol{u}) = \Big(\sum_{ij} h^\alpha_{ij}u^iu^j\Big)^2. \tag{7}$$

因为 M 是紧致的, 故 UM 是紧致的. f 必在 UM 的某个向量处达到它的极大值, 设这个向量是

$$\boldsymbol{v} = \sum_i v^i\boldsymbol{e}_i \in UM_{x_0}\quad x_0 \in M. \tag{8}$$

依照文[2]的推导, 可以得到

引理 2　设 N 是 $n+1$ 维单连通局部对称黎曼流形, M 是其紧致极小超曲面, 则 M 上存在局部正交、规范标架($\boldsymbol{e}_i$) , 使在 x_0 点有

$$f(\boldsymbol{v}) = (h^\alpha_{11})^2 = \max_{x\in UM}\{\|Q(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})\|^2\}, \tag{9}$$

$$(h^\alpha_{11i})^2 + h^\alpha_{11}h^\alpha_{11ii} \le 0, \tag{10}$$

$$h^\alpha_{11}h^\alpha_{ij} = 0\quad i \ne j. \tag{11}$$

2　定理的证明

定理 1 的证明. 若无其它说明, 以下计算均在式(8) 中的点 x_0 进行. 在引理 2 的式(10) 两边对 i 求和得

$$\sum_i (h^\alpha_{11i})^2 + h^\alpha_{11}\Delta h^\alpha_{11} \le 0. \tag{12}$$

利用引理 1 有

$$\Delta h^\alpha_{11} = -\sum_k (K_{\alpha k\alpha k}h^\alpha_{11} + K_{\alpha 1k\alpha}h^\alpha_{k1} + K_{\alpha 1\alpha k}h^\alpha_{1k} + K_{\alpha 11\alpha}h^\alpha_{kk})$$

$$+\sum_{km}(K_{mk1k}h^{\alpha}_{m1}+K_{m11k}h^{\alpha}_{mk})+\sum_{km}h^{\alpha}_{mk}R_{m11k}+\sum_{km}h^{\alpha}_{m1}R_{mk1k}. \tag{13}$$

注意到引理2中的式(9),(11)及M的极小性和Gauss方程,可得到

$$\begin{aligned}
h^{\alpha}_{11}\Delta h^{\alpha}_{11} &= -\sum_{k}(K_{\alpha k\alpha k}h^{\alpha}_{11})^2+K_{\alpha 11\alpha}h^{\alpha}_{k1}h^{\alpha}_{11}+K_{\alpha 1\alpha k}h^{\alpha}_{1k}h^{\alpha}_{11}+K_{\alpha 11\alpha}h^{\alpha}_{kk}h^{\alpha}_{11}) \\
&\quad+\sum_{km}(K_{mk1k}h^{\alpha}_{m1}h^{\alpha}_{11}+K_{m11k}h^{\alpha}_{mk}h^{\alpha}_{11})+\sum_{km}h^{\alpha}_{mk}h^{\alpha}_{11}R_{m11k}+\sum_{km}h^{\alpha}_{m1}h^{\alpha}_{11}R_{mk1k} \\
&= -\sum_{k}[K_{\alpha k\alpha k}(h^{\alpha}_{11})^2-K_{\alpha 1\alpha 1}h^{\alpha}_{11}h^{\alpha}_{kk}]+\sum_{k}[K_{1k1k}(h^{\alpha}_{11})^2+K_{k11k}h^{\alpha}_{kk}h^{\alpha}_{11}] \\
&\quad+\sum_{k}h^{\alpha}_{kk}h^{\alpha}_{11}R_{k11k}+\sum_{k}(h^{\alpha}_{11})^2R_{1k1k} \\
&= -\sum_{k}K_{\alpha k\alpha k}(h^{\alpha}_{11})^2+\sum_{k\neq 1}(R_{1k1k}+K_{1k1k})[(h^{\alpha}_{11})^2-h^{\alpha}_{11}h^{\alpha}_{kk}] \\
&= -\sum_{k}K_{\alpha k\alpha k}(h^{\alpha}_{11})^2+\sum_{k\neq 1}[2R_{1k1k}+(h^{\alpha}_{1k})^2-h^{\alpha}_{11}h^{\alpha}_{kk}][(h^{\alpha}_{1k})^2-h^{\alpha}_{11}h^{\alpha}_{kk}] \\
&= -\sum_{k}K_{\alpha k\alpha k}f(\nu)+2\sum_{k\neq 1}R_{1k1k}f(\nu)+f(\nu)\sum_{k}(h^{\alpha}_{kk})^2-2h^{\alpha}_{11}\sum_{k\neq 1}R_{1k1k}h^{\alpha}_{kk}.
\end{aligned}$$

当M具有非负截面曲率时,由上式及不等式$h^{\alpha}_{11}\sum_{k\neq 1}R_{1k1k}h^{\alpha}_{kk}\geq h^{\alpha}_{11}\sum_{k\neq 1}R_{1k1k}h^{\alpha}_{kk}$,$(h^{\alpha}_{kk})^2=\|Q(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_k)\|\leq(h^{\alpha}_{11})^2=f(\nu)$,可以得到

$$\begin{aligned}
h^{\alpha}_{11}\Delta h^{\alpha}_{11} &\geq -\sum_{k}K_{\alpha k\alpha k}f(\nu)+f(\nu)\sum_{k}(h^{\alpha}_{kk})^2=f(\nu)\left(\sum_{k}(h^{\alpha}_{kk})^2\right)-\sum_{k}K_{\alpha k\alpha k}) \\
&\geq f(\nu)\left(\sum_{k}(h^{\alpha}_{kk})^2\right)-n\tilde{X})=f(\nu)(S_{x_0}-n\tilde{X}),
\end{aligned} \tag{14}$$

其中S_{x_0}表示第二基本形式长度平方在x_0点的值.于是由式(12),(14)可以得到

$$f(\nu)(S_{x_0}-n\tilde{X})\leq 0. \tag{15}$$

由式(15)可以看出,当$S>n\tilde{X}$时,只可能$f(\nu)=0$.从式(9)可知,$S_{x_0}=0$与$S>n\tilde{X}$矛盾.所以,恒满足$S>n\tilde{X}$的具有非负截面曲率的紧致极小超曲面不存在.证毕.

参　考　文　献

1 Yau S T. Submanifolds with constant mean curture. X. Amer. T. of Math., 1979, 96(2): 346～366

2 王银河. 球面上常中曲率的子流形. 华侨大学学报(自然科学版), 1997, 18(3): 231～233

The Compact Minimal Hypersurface with Nonnegative Sectional Curvature

Wang Yinhe[①]　　Wang Wenli[②]

(① Dept. of Math., Inner Mongolia Norm. Univ.,

② Dept. of Comput. Sci., Inner Mongolia Norm. Univ., 010022, Huhehat)

Abstract In locally symmetric Rieman manifold, the compact minimal hypersurface with nonnegative sectional curvature was discussed by adopting active frame method. The theorem of nonexistence of this hypersurface was obtained.

Keywords locally symmetric, sectional curvature, compact