

两类新的高稳定性的三层显式差分格式^{*}

曾 文 平

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

摘要 提出解高阶发展方程 $\partial u / \partial t = a(\partial^{2k+1} u / \partial x^{2k+1})$ (其中 $a = 0$ 为常数, $k = 1, 2, 3, \dots$) 的两类新的具有高稳定性的三层显式差分格式, 较大地改进了同类格式的稳定性条件. 数值例子表明所作的稳定性分析是正确的.

关键词 高阶发展方程, 显式差分格式, 稳定性分析.

分类号 O 241. 82

1 问题的提出

文 [1] 讨论了演化 (发展) 方程 $u_t = \alpha u^q u_1 + au_p$ (其中 $q = 0, p = 2, p$ 和 q 是整数, α 和 a 是常数, u_1 和 u_p 分别表示 u 对 x 的一阶和 p 阶导数) 的守恒律. 对这样一类很重要的方程, 如何建立相应的差分格式是一件很有意义的事. 众所周知, 上述方程从某种意义上讲, 是下列两个方程 $u_t = \alpha u^q u_1$ 及 $u_t = au_p$ 的迭加. 文 [2] 分别对方程 $u_t = au_p$ 当 p 为奇数及偶数的情况建立若干差分格式; 文 [3, 4] 进一步构造了四类具高稳定性的三层显式差分格式, 改进了文 [2] 的结果. 尽管如此, 文 [2~4] 中的显式格式的稳定性条件仍较为苛刻, 而隐式格式则导致解线性方程组, 使得计算量大为增加. 本文将着重讨论发展方程 $u_t = au_p$ 当 p 为奇数, 即 $p = 2k+1$ 时的方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^{2k+1} u}{\partial x^{2k+1}} \quad (a = 0 \text{ 为常数, } k = 1 \text{ 的整数}). \quad (1)$$

建立两类具有较高稳定性的三层显式差分格式, 大大地改进了文 [2~4] 同类格式的稳定性条件. 数值例子表明, 本文所建立的差分格式是有效的, 其稳定性分析是正确的, 理论分析与实际计算相吻合.

2 差分格式的构造

把求解区域用两族平行于坐标轴且等距的直线, 组成均匀网格. 设 h, τ 分别表示空间方向和时间方向步长, 网域由求解区域上的点集 (x_m, t_n) 所构成, 这里 $x_m = x_0 + mh, t_n = t_0 + n\tau, m$ 和 n 为整数. 设微分方程的解 $u(x, t)$ 存在、唯一且充分光滑. 在差分格式中, u_m^n 表示定义在网域上的离散函数, 而在其余等式中, u_m^n 表示充分光滑的函数 $u(x, t)$ 在点 (x_m, t_n) 的值, 即 $u_m^n = u(x_m, t_n)$ 并设 $r = a\tau/h^{2k+1}$ 为网格比.

2.1 带耗散项的三层显式格式

类似于在一阶微分方程中引进具有小参数、对应于粘性的二阶导数, 在方程(1)中加进具有小参数 ϵ 的人工粘性项(耗散项) $\epsilon \frac{\partial^{2k+3} u}{\partial x^{2k+3}}$, 得到方程

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^{2k+1}} + \epsilon \frac{\partial^{2k+3} u}{\partial x^{2k+3}}. \quad (2)$$

然后, 将下列数值微分式代入上式, 得

$$\left. \begin{aligned} (u_t)_m^n &= \frac{1}{2} \{ (u_t)_{m-1}^n + (u_t)_{m+1}^n \} + O(h^2), \\ (u_t)_{m-1}^n &= \frac{1}{\tau} (u_{m-1}^n - u_{m-1}^{n-1}) + O(\tau), \\ (u_t)_{m+1}^n &= \frac{1}{\tau} (u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^n) + O(\tau), \\ \left(\frac{\partial^{2k+1} u}{\partial x^{2k+1}} \right)_m^n &= \frac{\delta_x^{2k} (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)}{2h^{2k+1}} + O(h^2), \\ \left(\frac{\partial^{2k+3} u}{\partial x^{2k+3}} \right)_m^n &= \frac{\delta_x^{2k+2} (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)}{2h^{2k+3}} + O(h^2), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中 $\delta_x^{2k} u_m^n = \sum_{j=0}^k (-1)^k \binom{k}{j} u_{m-j}^{n-1}$, 表示 $u(x, t)$ 在 (x_m, t_n) 处的 $2k$ 阶中心差分算子.

若令 $r = a\tau h^{2k+1}$ 为网格比. 且取 $\epsilon = rah^2/8$, 并舍去截断误差 $O(\tau h^2)$, 则得本文的带耗散项的第一个差分格式为

$$u_{m+1}^{n+1} = u_{m+1}^n - u_{m-1}^n + u_{m-1}^{n-1} + r \delta_x^{2k} (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) + \frac{r^2}{8} \delta_x^{2k+2} (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n). \quad (4)$$

若在导出差分格式的过程中, 将 $(u_t)_{m-1}^n$ 及 $(u_t)_{m+1}^n$ 分别用下列公式代替:

$$(u_t)_{m-1}^n = \frac{1}{\tau} (u_{m-1}^{n+1} - u_{m-1}^n) + O(\tau), \quad (u_t)_{m+1}^n = \frac{1}{\tau} (u_{m+1}^n - u_{m+1}^{n-1}) + O(\tau), \quad (5)$$

且取 $\epsilon = -rah^2/8$. 略去截断误差 $O(\tau h^2)$ 后则得带耗散项的第二个差分格式为

$$u_{m-1}^{n+1} = u_{m-1}^n - u_{m+1}^n + u_{m+1}^{n-1} + r \delta_x^{2k} (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) - \frac{r^2}{8} \delta_x^{2k+2} (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n). \quad (6)$$

显然, 显式格式(4)与(6)当 $\tau = O(h^{2k+1})$ 时, 均相容于方程(1).

2.2 双步长的三层显式格式

为了得到具有高稳定性的三层显式格式, 按下列方式构造差分格式:

$$\left. \begin{aligned} (u_t)_m^n &= \frac{1}{2} \{ (u_t)_{m+2}^n + (u_t)_{m-2}^n \} + O(h^2), \\ (u_t)_{m+2}^n &= \frac{1}{\tau} (u_{m+2}^{n+1} - u_{m+2}^n) + O(\tau), \\ (u_t)_{m-2}^n &= \frac{1}{\tau} (u_{m-2}^n - u_{m-2}^{n-1}) + O(\tau), \\ \left(\frac{\partial^{2k+1} u}{\partial x^{2k+1}} \right)_m^n &= \frac{1}{2 \cdot (2h)^{2k+1}} \delta_x^{2k} (u_{m+2}^n - u_{m-2}^n) + O(h^2), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中 δ_x^{2k} 表示关于 x 方向的步长为 $2h$ 的 $2k$ 阶中心差分算子.

将式(7)代入高阶发展方程(1)且舍去截断误差 $O(\tau h)$ 后, 使得本文的第一个双步长差

分格式为

$$u_{m+2}^{n+1} = \frac{r}{2^{k+1}} \delta_{2x}^k (u_{m+2}^n - u_{m-2}^n) + u_{m+2}^n - u_{m-2}^n + u_{m-2}^{n-1}. \quad (8)$$

如在导出式(8)的过程中, 将 $(u)_{m-2}^n$ 及 $(u)_{m+2}^n$ 分别用下列公式

$$(u)_{m-2}^n = \frac{1}{\tau} (u_{m-2}^{n+1} - u_{m-2}^n) + O(\tau), (u)_{m+2}^n = \frac{1}{\tau} (u_{m+2}^{n+1} - u_{m+2}^n) + O(\tau), \quad (9)$$

代替, 则得本文的第二个双步长差分格式. 即

$$u_{m-2}^{n+1} = \frac{r}{2^{k+1}} \delta_{2x}^k (u_{m+2}^n - u_{m-2}^n) + u_{m-2}^n - u_{m+2}^n + u_{m+2}^{n-1}. \quad (10)$$

特别地, 文[5], [6]所给的带耗散项格式及双步长格式, 是为本文同类格式当 $k=1$ 时的特例.

3 差分格式稳定性分析

为分析差分格式的稳定性, 先叙述两个 Miller 判别准则.

设 $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n$ ($a_0 a_n \neq 0$) 为复平面上的 n 次多项式. 定义多项式 $f^*(\lambda) = \lambda^n \bar{f}(\frac{1}{\lambda}) = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1}\lambda + \dots + \bar{a}_1\lambda^{n-1} + \bar{a}_0\lambda^n$ 和降幂多项式 $\hat{f}(z) = \frac{1}{z} \{f^*(0)f(z) - f(0)f^*(z)\}$ 称为 Bezout 结式, 其中 \bar{a}_i 表示 a_i ($i=0, 1, \dots, n$) 的共轭复数.

准则1^[7] 多项式 $f(z)$ 所有根按模小于等于1的充要条件: (1) $|f^*(0)| > |f(0)|$ 且 Bezout 结式只有按模小于等于1的根; 或者(2) $\hat{f} \neq 0$ 且 $f = 0$ 只有按模小于等于1的根.

准则2^[7] 多项式所有根按模小于等于1且等于1的根互异的充要条件(1) $|f^*(0)| > |f(0)|$ 且 Bezout 结式只有按模小于1的根, 且模等于1的根是互异的; 或者(2) $\hat{f} \neq 0$ 且 $f = 0$ 只有按模小于1的根.

下面用 Fourier 方法^[8], 分析差分格式的稳定性.

(1) 带耗散项的三层显格式(4), (6). 令

$$u_m^n = \lambda^n \exp(im\theta) \quad (|\theta| < \pi, i^2 = -1), \quad (11)$$

并将其代入式(4). 化简后, 得特征方程为

$$f(\lambda) = \lambda^2 e^{i\theta} - 2i\lambda \sin\theta \{1 + r(-4\sin^2 \frac{\theta}{2})^k + \frac{r^2}{8}(-4\sin^2 \frac{\theta}{2})^{k+1}\} - e^{-i\theta} = 0. \quad (12)$$

差分格式(4)稳定的条件为其特征方程 $f(\lambda) = 0$ 的全部根按模小于等于1且模为1为单根.

由前述定义, 易证 $\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \{f(0)f^*(\lambda) - f(\lambda)f^*(0)\} \neq 0$. 于是由 Miller 准则1知, 只要考察

$$f(\lambda) = 0 \text{ 的根 } \lambda = i \sin\theta \{1 + r(-4\sin^2 \frac{\theta}{2})^k + \frac{r^2}{8}(-4\sin^2 \frac{\theta}{2})^{k+1}\} e^{-i\theta}. \text{ 由 } |\lambda| = 1 \text{ 得} \\ -1 \leq \sin\theta \{1 + r(-4\sin^2 \frac{\theta}{2})^k + \frac{r^2}{8}(-4\sin^2 \frac{\theta}{2})^{k+1}\} \leq 1. \quad (13)$$

不难看出, 对任意 $k \geq 1$ 的整数, ± 1 不是特征方程 $f(\lambda) = 0$ 的重根.

当 $\sin\theta = 0$ 时, 式(13)恒成立. 今设 $\sin\theta \neq 0$, 且注意到当 $a > 0$ 时有 $r > 0$, 而 $a < 0$ 时则 $r < 0$ 以及三角函数的周期性, 解不等式(13)得差分格式(4)的稳定性条件.

当 k 为奇数及 $a > 0$ 时, 稳定性条件为

$$r = \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{(4\sin^2 \frac{\theta}{2})^{k-1} - \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\sin \theta})}{2^{k-1}(\sin \frac{\theta}{2})^{k+1}} \quad (0 < \theta < \pi); \quad (14)$$

当 k 仍为奇数而 $a < 0$ 时, 为绝对不稳定. (2) 当 k 为偶数及 $a > 0$ 时, 稳定性条件为

$$r = \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{(4\sin^2 \frac{\theta}{2})^{k-1} + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sin \theta})}{2^{k-1}(\sin \frac{\theta}{2})^{k+1}} \quad (0 < \theta < \pi); \quad (15)$$

当 k 仍为偶数而 $a < 0$ 时, 稳定性条件则为

$$-r = \frac{-1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{(4\sin^2 \frac{\theta}{2})^{k-1} + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sin \theta})}{2^{k-1}(\sin \frac{\theta}{2})^{k+1}} \quad (0 < \theta < \pi). \quad (16)$$

若记式(14)~(16)的右端函数为 $F(\theta)$, 仿照文[5]根据微分学极值原理, 可求得 $F(\theta) = 0$. 然后, 用对分法可以求得 $F(\theta) = 0$ 的近似根 θ^* 及 $F(\theta)$ 的近似下确界 $F(\theta^*) = \inf_{0 < \theta < \pi} F(\theta)$, 从而可得格式(4)的稳定性条件 $|r| \leq r_{\text{opt}} = F(\theta^*)$. 类似的, 可得格式(6)的稳定性条件. 由于 $F(\theta) = 0$ 的表达式过于繁杂, 我们将其略去, 而只将计算结果列表并与蛙跳格式的稳定性条件 $|r| \leq (\frac{k+1}{2k+1})^{2k+1}$ 列表比较如表 1.

表 1 差分格式(4)和(6)与蛙跳格式^[2]稳定性条件比较表

k	$\theta^*/(\circ)$	格式(4) ($a > 0$) 格式(6) ($a < 0$) 稳定条件 r_{opt}	$\theta^*/(\circ)$	格式(4) ($a < 0$) 格式(6) ($a > 0$) 稳定条件 r_{opt}	蛙跳格式 稳定条件
1	148.053 30	2.382 484		0	0.384 900 10
2	160.118 78	2.296 315	140.580 92	0.000 366	0.120 747 67
3	166.169 22	2.080 118		0	0.053 261 90
4	171.194 06	2.041 546	149.140 91	0.000 081	$9.919 87 \times 10^{-3}$
5	174.362 51	2.013 881		0	$2.729 59 \times 10^{-3}$
6	176.436 62	2.006 123	153.695 39	0.000 020	$7.393 90 \times 10^{-4}$

由表 1 看出: (1) 当 $a > 0$ 时格式(4)及 $a < 0$ 时格式(6)的稳定性条件明显地优于蛙跳格式的稳定性条件, 约为蛙跳格式的 $8 \sim 10^3$ 倍, 稳定性条件有较大改进; (2) 当 $a < 0$ 时的格式(4)及 $a > 0$ 时的格式(6), 它实质上都是绝对不稳定的或稳定性条件过分苛刻以致于不切实用; (3) 当 $a > 0$ 时格式(4)及 $a < 0$ 时格式(6)的稳定性条件随着方程阶数 $2k+1$ 的增加而逐步减少, 但减少得很缓慢, 如 $k=6$ ($2k+1=13$ 时), $r_{\text{opt}}=2$; (4) 当 $k=1$ 时, 方程(1)变为熟知的色散方程 $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, 文[5]所得差分格式及其稳定性条件也成为本文的特例. 由此也可说明, 本文对格式(4), (6)所作的稳定性分析是正确的. 随后的数值例子, 又进一步验证所作的稳定性分析是正确的.

(2) 双步长显式格式(8), (10). 由 Fourier 分析法, 可得格式(8)的特征方程为

$$\lambda^2 - i2\theta = 2i\lambda(1 + \frac{r}{2}(-\sin^2 \theta)) \pm i\sin 2\theta - e^{i2\theta} = 0. \quad (17)$$

由 Miller 准则 2, 可知差分格式 (8) 的稳定性条件为

$$-1 < \sin 2\theta \{1 + \frac{r}{2}(-\sin^2 \theta)^k\} < 1.$$

由此仿照文 [6] 的讨论, 可得格式 (8) 的稳定性条件. (a) $k = 2m - 1$ 为奇数 ($m = 1, 2, 3, \dots$) 且 $a > 0$ 时, 有

$$r < \frac{2(1 + \sin 2\theta)}{\sin 2\theta \sin^{4m-2} \theta} \quad (\sin 2\theta > 0), \quad (18)$$

而 $a < 0$ 时绝对不稳定. (b) $k = 2m$ 为偶数 ($m = 1, 2, 3, \dots$) 且 $a < 0$ 时, 有

$$-r < \frac{2(1 + \sin 2\theta)}{\sin 2\theta \sin^{4m} \theta} \quad (\sin 2\theta > 0), \quad (19)$$

而 $a > 0$ 时绝对不稳定.

同理, 可得格式 (10) 的稳定性条件. (a) $k = 2m - 1$ 为奇数 ($m = 1, 2, 3, \dots$) 且 $a < 0$ 时, 有

$$-r < \frac{2(1 + \sin 2\theta)}{\sin 2\theta \sin^{4m-2} \theta} \quad (\sin 2\theta > 0), \quad (20)$$

而 $a > 0$ 时绝对不稳定. (b) $k = 2m$ 为偶数 ($m = 1, 2, 3, \dots$) 且 $a > 0$ 时, 有

$$r < \frac{2(1 + \sin 2\theta)}{\sin 2\theta \sin^{4m} \theta} \quad (\sin 2\theta > 0), \quad (21)$$

而 $a < 0$ 时绝对不稳定.

若令式 (18) ~ (21) 右端函数为 $F(\theta) = \frac{2(1 + \sin 2\theta)}{\sin 2\theta \sin^{2k} \theta}$, 类似于前面讨论, 根据极值原理可以数值地求出差分格式 (8), (10) 的稳定性条件如表 2 所示. 我们曾经计算出 $k = 1 \sim 86$ 的格式 (8), (10) 的稳定性条件, 为节省篇幅起见, 这里仅列出 $k = 1 \sim 42$ 的格式 (8), (10) 的稳定性条件如表 2 所示.

表 2 差分格式 (8) ($(-1)^k a < 0$) 及 (10) ($(-1)^k a > 0$) 的稳定性条件^①

$k = 1$	$x = 1.132$	$r = 5.613\ 277\ 814\ 7$	$k = 9$	$x = 1.376$	$r = 10.245\ 733\ 222\ 0$
$k = 2$	$x = 0.785$	$r = 0.000\ 000\ 000\ 0$	$k = 10$	$x = 0.785$	$r = 0.000\ 000\ 011\ 2$
$k = 3$	$x = 1.270$	$r = 7.290\ 064\ 264\ 8$	$k = 11$	$x = 1.392$	$r = 10.985\ 421\ 663\ 0$
$k = 4$	$x = 0.785$	$r = 0.000\ 000\ 000\ 2$	$k = 12$	$x = 1.294$	$r = 4.578\ 855\ 402\ 7$
$k = 5$	$x = 1.324$	$r = 8.462\ 598\ 558\ 5$	\vdots	\vdots	\vdots
$k = 6$	$x = 0.785$	$r = 0.000\ 000\ 000\ 7$	$k = 41$	$x = 1.471$	$r = 18.195\ 200\ 435\ 0$
$k = 7$	$x = 1.355$	$r = 9.418\ 443\ 581\ 4$	$k = 42$	$x = 1.447$	$r = 11.746\ 376\ 060\ 0$
$k = 8$	$x = 0.785$	$r = 0.000\ 000\ 002\ 8$			

① 表中 x 即为 θ 弧度数)

根据上述讨论及表 2, 可以得出下述 4 种情况.

(a) 当 k 为奇数时, 格式 (8) ($a < 0$) 及格式 (10) ($a > 0$) 恒不稳定; 当 k 为偶数时, 格式 (8) ($a > 0$) 及格式 (10) ($a < 0$) 恒不稳定.

(b) 当 k 为奇数时, 格式 (8) ($a > 0$) 及格式 (10) ($a < 0$) 以及当 k 为偶数时格式 (8) ($a < 0$) 及格式 (10) ($a > 0$) 均为条件稳定, 其稳定性条件见表 2.

(c) 当差分格式 (8), (10) 条件稳定时 (表 2), 若 k 为奇数 ($k = 1, 3, 5, \dots, 41$) 稳定性条件由 $|r| \leq 5.613\ 277\ 814\ 7$ 单调递增至 $18.195\ 200\ 435\ 0$; 当 k 为偶数时, 格式为绝对不稳定. 但当 $12 \leq k \leq 42$ 的偶数时, 稳定性条件由 $|r| \leq 4.578\ 855\ 402\ 7$ 单调递增至 $11.746\ 376\ 060\ 0$.

其稳定性条件均比格式 (4), (6) 有较大幅度放宽, 而比蛙跳格式则更好.

(d) 当 $k = 1$ 时, 方程(1)变为熟知的色散方程 $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, 文 [6] 所得结果成为本文之特例. 由此, 也进一步证实本文对稳定性分析的正确性.

4 数值例子

分别考虑下列两种发展方程的初值问题. (1) $k = 2$ 时, 发展方程(1)的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \\ u(x, 0) = x^5 + 6 \end{cases} \quad (-\infty < x < \infty, t > 0), \tag{22}$$

其精确解为 $u^*(x, t) = 120at + x^5 + 6$. (2) $k = 3$ 时发展方程(1)的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^7 u}{\partial x^7} \\ u(x, 0) = \frac{1}{42}x^7 + 6 \end{cases} \quad (-\infty < x < \infty, t > 0), \tag{23}$$

其精确解为 $u^{**}(x, t) = 120at + \frac{1}{42}x^7 + 6$.

为了验证差分格式(4), (6), (8), (10)的稳定性条件, 我们编程上机进行计算. 对问题(22), 按带耗散项格式(4), (6) ($k = 2$) 进行计算; 对问题(23), 按双步长格式(8), (10) ($k = 3$) 进行计算.

定义误差 $T_m^n = |u(x_n, t_n) - u_m^n|$, 其中 $u(x_m, t_n)$ 表示按公式 $u^*(x, t)$ 或 $u^{**}(x, t)$ 算出的精确解, u_m^n 则为用差分格式算出的差分解. 表 3 和表 4, 列出了按差分格式(4), (6), (8), (10) 计算的部分误差数据. 注意到因本文所构造的两种类型的差分格式都是三层格式, 故除初始层网格函数值已知外, 尚须先按其它方法算出第一层网格函数值. 为简便计, 我们按精确值计算出第一层网格的函数值.

表 3 差分格式(4)和(6)计算初值问题(22)的数值误差表

a	h	r	n	m			
				1100	1300	1500	1700
1	0.01	2.296	200	$4.494\ 639 \times 10^{-5}$	$1.196\ 288 \times 10^{-5}$	$6.227\ 835 \times 10^{-6}$	$8.357\ 424 \times 10^{-4}$
1	0.01	2.297	200	$6.305\ 666 \times 10^9$	$7.550\ 799 \times 10^{11}$	$4.448\ 502 \times 10^{10}$	$7.401\ 738 \times 10^{12}$
-1	0.01	-2.296	200	$3.391\ 003 \times 10^{-5}$	$5.385\ 867 \times 10^{-4}$	$1.251\ 688 \times 10^{-3}$	$8.399\ 785 \times 10^{-4}$
-1	0.01	-2.297	200	$1.119\ 064 \times 10^{10}$	$7.253\ 087 \times 10^9$	$6.599\ 524 \times 10^9$	$3.415\ 655 \times 10^{11}$

表 4 差分格式(8)和(10)计算初值问题(23)的数值误差表

a	h	r	n	m			
				1000	1300	1600	2000
1	0.01	7.285	150	$3.490\ 506 \times 10^{-5}$	$7.980\ 102 \times 10^{-5}$	$8.990\ 550 \times 10^{-5}$	$1.013\ 224 \times 10^{-5}$
1	0.01	7.295	150	$3.266\ 875 \times 10^{10}$	$1.098\ 333 \times 10^{10}$	$4.866\ 350 \times 10^{10}$	$3.796\ 823 \times 10^{10}$
-1	0.01	-7.285	150	$2.674\ 222 \times 10^{-4}$	$8.741\ 043 \times 10^{-5}$	$2.865\ 311 \times 10^{-4}$	$3.524\ 689 \times 10^{-4}$
-1	0.01	-2.295	150	$2.733\ 240 \times 10^{10}$	$2.967\ 645 \times 10^9$	$2.998\ 763 \times 10^8$	$4.630\ 522 \times 10^{10}$

由表 3, 4 看出: (1) 当 $k = 2$ 时, 取 $|r| = 2.296$ 按格式(4), (6) 对问题(22) 进行计算是稳定的, 而取 $|r| = 2.297$ 计算则不稳定; (2) 当 $k = 3$ 时, 取 $|r| = 7.285$ 按格式(8), (10) 对问题

(23) 进行计算是稳定的, 而取 $|r| = 7.295$ 的计算同样不稳定.

上述结果表明, 我们所作的理论分析是正确的, 理论分析与实际计算完全吻合.

许利帷、陈常清同志协助上机算题, 仅此表示衷心的感谢.

参 考 文 献

- 1 屠规彰, 秦孟兆. 非线性演化方程的不变群与守恒律——对称函数方法. 中国科学(A 辑), 1980, (5): 421 ~ 432
- 2 秦孟兆. 一类演化方程 $u_t = \alpha u^q u_1 + au_p$ 的差分格式. 科学通报, 1982, 27(5): 261 ~ 263
- 3 曾文平. 一类演化方程的高稳定性的差分格式. 计算物理, 1995, 12(4): 565 ~ 570
- 4 曾文平. 高阶发展方程的两类显式格式的稳定性分析. 华侨大学学报(自然科学版), 1996, 17(3): 231 ~ 235
- 5 林鹏程. 色散方程 $u_t = au_{xxx}$ 的一类具高稳定性的三层显式格式. 应用数学和力学, 1988, 9(9): 803 ~ 808
- 6 林鹏程. 色散方程 $u_t = au_{xxx}$ 的两类高稳定性三层显式格式. 福州大学学报(自然科学版), 1990, 18(1): 6 ~ 12
- 7 Miller J J H. On the location of zeros of certain classes of polynomials with application to numerical analysis. J. Inst. Math. Appls., 1971 (8): 397 ~ 406
- 8 Richtmyer R D, Morton K W. Difference methods for initial-value problems. 2nd Edit. New York: John Wiley and Son Inc., 1967. 38 ~ 91

Two New Classes of Three-Level Explicit Difference Schemes with Higher Stability

Zeng Wenping

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract Two new classes of three-level explicit difference schemes with higher stability are presented for solving higher-order evolution equation $\partial u / \partial t = a \partial^{2k+1} u / \partial x^{2k+1}$, where $a \neq 0$ is a constant, $k = 1, 2, 3, \dots$. By which the stability condition of similar schemes can be fairly greatly improved. Numerical example indicates the correctness of the author's stability analysis.

Keywords higher-order evolution equation, explicit difference schemes, stability analysis