

算子代数上 Hermitian 双线性泛函表示^{*}

宋 海 洲

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

摘要 在紧支集无穷次可微函数空间, 或急速下降无穷次可微函数空间上, 给出取值算子代数中的 Hermitian 双线性泛函的表示, 为算子代数上的广义函数提供有用的工具.

关键词 C^* -代数, 正定, Hermitian 双线性泛函, Fourier 变换, 平移不变

分类号 O 174. 55

揭开函数论新篇章的许瓦兹广义函数理论, 它为微分方程理论提供了强有力的工具. 在算子代数迅猛发展的同时^[1~4], 非交换分析也发展很快. 人们希望属算子代数的广义函数理论, 为 C^* -algebra 的微分方程提供强有力的工具. Matsumoto^[5]把许瓦兹的广义函数理论, 推广到具有 \mathbf{R}^n -action 的算子代数的广义函数上, 并应用于解抽象微分方程. 正定广义函数为广义随机过程提供了强有力的工具; 而平移不变正定 Hermitian 双线性泛函, 对于广义函数是非常重要的. 因此, 它暗示我们去发展算子代数上的平移不变正定 Hermitian 双线性泛函理论. 这正是启发本文探讨的动机. 许瓦兹已经证明了数值上的 Kernel 定理—— D 是有紧支集无穷次可微函数空间. 每一个双线性泛函 $B(\Phi, \Psi)$, 如果 $B(\Phi, \Psi)$ 关于 Φ 和 Ψ 都是连续的, 那么其形式可表示为 $B(\Phi, \Psi) = (F, \Phi(x) \overline{\Psi(y)})$, F 是 D_2 上的线性连续泛函, D_2 是两个变量的有紧支集无穷次可微函数空间. 我们把这一结果推广到取值于 C^* -代数的情形, 即每一个 D 上 Hermitian A 值双线性泛函 $B(\Phi, \Psi)$, 其形式可以表示成为 $B(\Phi, \Psi) = (F, \Phi(x) \overline{\Psi(y)})$, F 是 D_2 上的一个 A (一个 C^* -代数) 值广义函数. 这就为 A 值平移不变正定 Hermitian 双线性泛函的表示, 提供一个理论基础.

1 一些引理

定义 一个 A 值双线性泛函 $B(\Phi, \Psi)$ ($\Phi \in D, \Psi \in D$), 称为 Hermitian 双线性泛函, 假如其满足下述情况. (1) 固定 $\Psi(x)$, $B(\Phi, \Psi)$ 是关于 Φ 的线性连续泛函(按 D 中拓扑). (2) 固定 $\Phi(x)$, $B(\Phi, \Psi)$ 是关于 Ψ 的线性连续泛函(按 D 中拓扑).

对于推广 Kernel 定理到 A 值的情形, 为了简单起见, 仅考虑单变量的情形, 对多变量情形, 我们只要稍作改变就可得到定理的证明. 下面先证明一些引理.

记 $H(a)$ 为所有定义于 $x \in a$ 上、平方可积的函数构成的 Hilbert 空间. $H(a)$ 上的内积定

义为

$$(\Phi, \Psi) = \int_{-a}^a \Phi(x) \overline{\Psi(x)} dx.$$

记 $H(a)$ 上的范数为 $\|\cdot\|$, 即 $\|\Phi\| = [\int_{-a}^a \Phi(x)^2 dx]^{1/2}$. 对于 Hermitian 值双线性泛函

$B(\Phi, \Psi)$, 动用和文 [6] 中定理 3 相同的方法(仅用 A 上 C^* 范数代替 \mathbf{R} 上绝对值范数), 可得类似的结论. 也就是说, 存在范数 $\|\cdot\|_n$ 和 $\|\cdot\|_m$ 使得

$$B(\Phi, \Psi) = M \|\Phi\|_n \|\Psi\|_m.$$

引理 1 如果 $B(\Phi, \Psi)$ 是 Hermitian 值双线性泛函, 且满足

$$\left. \begin{aligned} B(\Phi, \Phi) &= M \|\Phi\|_n^2, \\ B(\Phi, \Psi) &= M \|\Phi\|_n \|\Psi\|_m, \\ B(\Phi, \Psi) &= M \|\Phi\|_n \|\Psi\|_m, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 $\Phi(x) \in H(a)$, $\Psi(x) \in H(a)$, $\Phi(x) \in H(a)$, $\Psi(x) \in H(a)$. 那么, Hermitian 值双线性泛函 $B(\Phi, \Psi)$ 可表示为

$$B(\Phi, \Psi) = \int_{-a}^a \int_{-a}^a F(x, y) \Phi(x) \overline{\Psi(y)} dx dy, \quad (2)$$

其中 $F(x, y) \in H^{\frac{1}{2}}(a)$, 而 $H^{\frac{1}{2}}(a)$ 是所有从 $\{x \in a, y \in a\}$ 到 A 的可测函数 F (F 满足 $\int_{-a}^a \int_{-a}^a F(x, y)^2 dx dy < \infty$) 构成的 Banach 空间. $H^{\frac{1}{2}}(a)$ 空间的范数表示为 $(\int_{-a}^a \int_{-a}^a F(x, y)^2 dx dy)^{1/2}$.

证明 选择 $X_n(x) = \frac{1}{2a} \exp\left[\frac{\pi i n x}{a}\right]$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 函数列构成 $H(a)$ 的正交基^[6], 则 $\overline{X_m(x)} X_n(y) = \frac{1}{2a} \exp\left[\frac{-\pi i (mx - ny)}{a}\right]$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 函数列也构成 $H_2(a)$ 正交基, 其中 $H_2(a)$ 是定义于 $\{x \in a, y \in a\}$ 上的且平方可积的函数构成的 Hilbert 空间.

为了构造核 $F(x, y)$, 我们考虑级数

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B(X_m, X_n) \overline{X_m(x)} X_n(y). \quad (3)$$

证明级数(3)按 $H_2(a)$ 中的范数收敛时, 只要证明下面式(4)收敛:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B(X_m, X_n)^2. \quad (4)$$

由不等式(1)可得 $B(X_m, X_n) \leq M \|X_m\|_n \|X_n\|_m$ 和 $B(X_m, X_n) \leq M \|X_m\|_n \|X_n\|_m$.

又由 $X_n(x) = \frac{\pi i n}{a} X_n(x)$ 和 $\|X_n\|_n = 1$, 可得

$$B(X_m, X_n) = \frac{M_1}{m-n} \frac{a}{\pi}, m \neq 0, n \neq 0,$$

$$B(1, X_n) = \frac{M_1}{n}, n \neq 0,$$

$$B(X_m, 1) = \frac{M_1}{m}, m \neq 0,$$

其中 $M_1 = \frac{Ma}{\pi}$. 因此, 级数(4)被下面级数(5)控制:

$$B(1, 1)^2 + 4M_1^2 a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{4M_1^2 a}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 n^2}. \quad (5)$$

由于级数(5)收敛, 故级数(4)收敛. 于是, 级数(3)按范数收敛. 记级数(3)的和为 $F(x, y)$, 即

$$F(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B(X_m, X_n) \overline{X_m(x)} X_n(y). \quad (6)$$

既然 $F(x, y)$ 是 Fourier 级数的和(按范数收敛), 那么 $F(x, y)$ 是平方可积的, 即

$$\int_{-a}^a \int_{-a}^a F(x, y)^2 dx dy < \infty.$$

因此

$$\int_{-a}^a \int_{-a}^a F(x, y) \Phi(x) \overline{\Psi(y)} dx dy$$

定义一个空间 $H(a)$ 上的取值于 A 中的双线性泛函. 我们将证明这个泛函就等于泛函 $B(\Phi, \Psi)$.

由于这两个泛函都是连续的, 故只要证明这两个泛函一致作用于 $H(a)$ 的正交基 $X_m(x)$ 就行了. 也就是说, 只要证明等式

$$B(X_m, X_n) = \int_{-a}^a \int_{-a}^a F(x, y) X_m(x) \overline{X_n(y)} dx dy. \quad (7)$$

由式(6)可知, $B(X_m, X_n)$ 是函数 $F(x, y)$ 在空间 $H_2(a)$ 关于正交基 $X_m(x) \overline{X_n(y)}$ 的 Fourier 系数, 故式(7)成立. 于是, 上述引理得证(其中 $H_2(a)$ 是定义于 $\{x \in [-a, a], y \in [-a, a]\}$ 上的且平方可积的函数构成的 Hilbert 空间).

对于多变量, 一个相似的结论成立. 我们只要用不等式

$$B(\Phi^{(j)}, \Psi^{(k)}) \leq M \|\Phi^{(j)}\| \|\Psi^{(k)}\|, \quad 0 \leq j \leq n, \quad 0 \leq k \leq n$$

代替不等式(1)即可. 现把这个结论, 推广到 Hilbert 空间 $H^m(a)$ 上的 Hermitian 值双线性泛函的情形. $H^m(a)$ 是所有由定义于 $x \in [-a, a]$ 上的有 $m-1$ 阶的连续导数(两个端点在 $-a, a$), 且 $m-1$ 阶连续导数有

$$\Phi^{(m-1)}(x) = c + \int_{-a}^x \Phi^{(m)}(t) dt,$$

其中 $\Phi^{(m)}(t)$ 是 $[-a, a]$ 上的可积函数的函数构成的 Hilbert 空间. $H^m(a)$ 的内积定义为

$$(\Phi, \Psi)_m = \sum_{k=0}^m \int_{-a}^a \Phi^{(k)}(x) \overline{\Psi^{(k)}(x)} dx.$$

$H^m(a)$ 的范数为 $\|\Phi\|_m = \sqrt{(\Phi, \Phi)_m}$.

引理2 如果 $B(\Phi, \Psi)$ 是 Hilbert 空间 $H^m(a)$ 上的一个 Hermitian 值双线性泛函, 且满足

$$\left. \begin{aligned} B(\Phi, \Psi) &= (\Phi)_m (\Psi)_m, \\ B(\Phi, \Psi) &= (\Phi)_m (\Psi)_m, \\ B(\Phi, \Psi) &= (\Phi)_m (\Psi)_m, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中 $\Phi(x) \in H^m(a)$, $\Psi(x) \in H^m(a)$, $\Phi(x) \in H^m(a)$, $\Psi(x) \in H^m(a)$, 那么 Hermitian 值双线性泛函能表示为

$$B(\Phi, \Psi) = \sum_{k,l=0}^m \int_{-a}^x \int_{-a}^x \frac{\partial^{k+l} F(x, y)}{\partial x^k \partial y^l} \Phi^{(k)}(x) \overline{\Psi^{(l)}(y)} dx dy.$$

其中 $F(x, y)$ 满足

$$\frac{\partial^{k+l} F(x, y)}{\partial x^k \partial y^l} \in H^{\frac{A}{2}}(a), 0 \leq k, l \leq m.$$

这个引理的证明, 完全类似于引理 1 的证明方法, 只需选择如下的核, 即

$$B(\Phi, \Psi) = \sum_{j, k=0}^m B(X_j, X_k) \frac{\overline{X_j(x)} X_k(y)}{X_j^{\frac{2}{m}} X_k^{\frac{2}{m}}}.$$

对于多变量, 我们也有类似的引理.

先看一看 $D(a)$ 上 Hermitian 值双线性泛函的情形. $D(a)$ 是 $x = a$ 外为 0 的无穷次可微函数空间, 这个空间是可列赋范的. 它的范数定义为

$$\Phi_m = \sup_{0 \leq k} \max_{a \leq x} \Phi^k(x).$$

用范数 Φ_m 代替范数 Φ 更为方便. 范数 Φ_m 是通过内积

$$(\Phi, \Psi)_m = \sum_{k=0}^m \int_a^x \Phi^{(k)}(x) \overline{\Psi^{(k)}(x)} dx$$

来定义的. 这两个范数的等价性在 [6] 中已给出证明.

记 $D^m(a)$ 为空间 $D(a)$ 关于范数 $\Phi_m = \sqrt{(\Phi, \Phi)_m}$ 的完备化空间. 这完备化空间 $D^m(a)$ 显然是一个 Hilbert 空间, 它的内积是

$$(\Phi, \Psi)_m = \sum_{k=0}^m \int_a^a \Phi^{(k)}(x) \overline{\Psi^{(k)}(x)} dx,$$

而且是 $H^m(a)$ 的子空间.

需要用到下面的结论: 如果 $\Phi(x) \in H^m(a)$ 且 $\Psi(x) \in H^m(a)$ 那么不等式

$$\Phi_m \leq \Psi_{m+1} \quad (9)$$

成立. 实际上, $(\Phi, \Phi)_m = \sum_{k=0}^m \int_a^a \Phi^{(k+1)}(x)^2 dx \leq \sum_{k=0}^{m+1} \int_a^a \Phi^{(k)}(x)^2 dx = (\Phi, \Phi)_{m+1}$, 因此 $\Phi_m \leq \Psi_{m+1}$ 成立.

现考虑 $D(a)$ 上 Hermitian 值双线性泛函 $B(\Phi, \Psi)$. 用文 [6] 定理 3 的类似方法, 可得存在 m, n 使得泛函 $B(\Phi, \Psi)$ 在 $D(a)$ 是连续的 (关于范数 Φ_m 和 Ψ_n), 不失一般性, 其中可假设 $m = n$. 因此泛函 $B(\Phi, \Psi)$ 满足不等式

$$B(\Phi, \Psi) \leq M \Phi_m \Psi_m.$$

由此, 泛函 $B(\Phi, \Psi)$ 可连续扩张到 $D^m(a)$ 上的线性连续泛函, 且可连续扩张到 $H^m(a)$ 上的线性连续泛函. 如果 $\Phi(x) \in H^m(a)$, $\Psi(x) \in H^m(a)$, $\Phi(x) \in H^m(a)$, $\Psi(x) \in H^m(a)$, 那么由不等式 (9) 可知下面不等式

$$B(\Phi, \Psi) \leq M \Phi_m \Psi_m \leq M \Phi_{m+1} \Psi_{m+1},$$

$$B(\Phi, \Psi) \leq M \Phi_{m+1} \Psi_{m+1} \text{ 和 } B(\Phi, \Psi) \leq M \Phi_{m+1} \Psi_{m+1}$$

成立. 应用引理 2, 可得到 $B(\Phi, \Psi)$ 有

$$B(\Phi, \Psi) = \sum_{k, l=0}^{m+1} \int_a^a \frac{\partial^{k+l} F(x, y)}{\partial x^k \partial y^l} \Phi^{(k)}(x) \overline{\Psi^{(l)}(y)} dx dy, \quad (10)$$

其中 $F(x, y)$ 满足

$$\frac{\partial^{k+l} F(x, y)}{\partial x^k \partial y^l} \in H^{\frac{A}{2}}(a), 0 \leq k, l \leq m+1.$$

这样一来, 我们证明了如下的结论.

引理 3 对于 $D(a)$ 上任一 Hermitian A 值的双线性泛函 $B(\Phi, \mathcal{Q})$, 都可以表示成为式(10)的形式. $D(a)$ 是 $x = a$ 外为 0 的无穷次可微函数空间, 其中 $F(x, y)$ 满足

$$\frac{\partial^{k+l} F(x, y)}{\partial x^k \partial y^l} \in H^{\frac{1}{2}}(a), 0 \leq k, l \leq m-1.$$

因此

$$(F, \Phi) = \sum_{k, l=0}^{m-1} \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{\partial^{k+l} F(x, y)}{\partial x^k \partial y^l} F(x, y) \Phi^{(k)}(x) \overline{\Phi^{(l)}(y)} dx dy. \quad (11)$$

定义了一个 $D_2(a)$ 上的线性连续泛函 $F(D_2(a))$ 是 $\{(x, y) \mid x = a, y = a\}$ 外为 0 的无穷次可微函数空间, 因此引理 3 的形式又可表示成为如下的定理.

引理 4 对于 $D(a)$ 上任一 Hermitian A 值的双线性泛函 $B(\Phi, \mathcal{Q})$ ($D(a)$ 是 $x = a$ 外为 0 的无穷次可微函数空间), 都可以表示成为如下形式

$$B(\Phi, \mathcal{Q}) = (F, \Phi(x) \overline{\mathcal{Q}(y)}),$$

其中 $F \in H^{\frac{1}{2}}(a)$.

2 主要结果

于是容易得到 D 上的 Hermitian A 值双线性泛函表示形式 (D 是有紧支集无穷次可微函数空间). 实际上, 如果 $B(\Phi, \mathcal{Q})$ 是 D 上的 Hermitian A 值的双线性泛函, 则对一切 $a > 0$, $B(\Phi, \mathcal{Q})$ 就是 D 的子空间 $D(a)$ 上的一 Hermitian A 值的双线性泛函 $B_a(\Phi, \mathcal{Q})$. 由引理 4 知, 存在一个 A 值可测泛函 $F_a, F_a \in H^{\frac{1}{2}}(a)$, 使得

$$B(\Phi, \mathcal{Q}) = B_a(\Phi, \mathcal{Q}) = (F_a, \Phi(x) \overline{\mathcal{Q}(y)}).$$

它对 $\forall \Phi(x) \in D(a), \forall \mathcal{Q}(y) \in D(a)$ 成立. 这些 A 值可测泛函 F_a 在如下意义下是一致的:

$$(F_b, X(x, y)) = (F_c, X(x, y)), \quad (12)$$

其中, $X(x, y) \in D_2(a), b = a, c = a$. 事实上, 假设 $b = a$, 对 $\forall \Phi(x) \in D(a), \forall \mathcal{Q}(y) \in D(a)$, 有

$$(F_b, \Phi(x) \overline{\mathcal{Q}(y)}) = B_b(\Phi, \mathcal{Q}) = B(\Phi, \mathcal{Q}).$$

既然等式的右边不依赖于 b , 因此 $(F_b, \Phi(x) \overline{\mathcal{Q}(y)}) = (F_c, \Phi(x) \overline{\mathcal{Q}(y)})$ 对 $\forall b = a, c = a$ 成立. 这样, 等式(12)对形如 $\Phi(x) \overline{\mathcal{Q}(y)}$ 的 $X(x, y)$ 也成立. 又由于 $\Phi(x) \overline{\mathcal{Q}(y)}$ 的线性组合在空间 $D_2(a)$ 上稠密, 故等式(12)对任意 $X(x, y) \in D_2(a)$ 成立.

由 A 值可测泛函 F_a 的一致性, 可以通过等式

$$(F, \mathcal{Q}(x, y)) = (F_a, \mathcal{Q}(x, y))$$

定义一个 A 值广义函数. 其中 a 是某一使得 $\mathcal{Q}(x, y)$ 在 $\{(x, y) \mid x = a, y = a\}$ 外为 0 的数. 由 A 值可测泛函 F_a 的一致性, 可得 $(F, \mathcal{Q}(x, y))$ 的值并不依赖于 a 的选取. 这样 A 值广义函数 F 对 $\forall \mathcal{Q}(x, y) \in D_2$ 是唯一确定.

由 F_a 的线性性和连续性知, A 值广义函数 F 是线性的、连续的, 而且对 $\forall \mathcal{Q}(x) \in D, \mathcal{Q}(y) \in D$ 有

$$B(\Phi, \mathcal{Q}) = (F, \Phi(x) \overline{\mathcal{Q}(y)}).$$

事实上, 存在一个 a , 使得 $\Phi(x)$ 和 $\mathcal{Q}(y)$ 在区间 $x = a$ 外为 0, 于是

$$B(\Phi, \Psi) = B_a(\Phi, \Psi) = (F_a, \Phi(x) \overline{\Psi(y)}) = (F, \Phi(x) \overline{\Psi(y)}).$$

这样我们就证明了下面的定理.

定理 1 D 是有紧支集无穷次可微函数空间. 每一个 D 上 Hermitian A 值的双线性泛函 $B(\Phi, \Psi)$ 可以表示

$$B(\Phi, \Psi) = (F, \Phi(x) \overline{\Psi(y)}),$$

其中 F 是 D_2 上的一个 A 值广义函数. 由此定理, 可以毫不困难地推广到 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 是多变量的情形.

对于 S 上 Hermitian A 值的双线性泛函, 也有下面相似的定理(S 是急速下降无穷次可微函数空间).

定理 2 任意一个 S 上 Hermitian A 值的双线性泛函 $B(\Phi, \Psi)$ 可以表示为

$$B(\Phi, \Psi) = (F, \Phi(x) \overline{\Psi(y)}),$$

其中 F 是一个 S_2 上的 A 值广义函数(S_2 是由所有急速下降函数构成的 Hilbert 空间), 只要对核 $F(x, y)$ 稍作修改, 就可得到上述定理.

感谢吴良森教授和颀火安老师为本文提供了许多有益的建议.

参 考 文 献

- 1 Liangsen W. 算子代数上的正定函数. 数学年刊. 1997, 18(A2): 187 ~ 192
- 2 Gel'fand I M, Vilenkin N Y. Generalized functions(4). New York: Academic Press. 1964. 11 ~ 30
- 3 张上泰. 算子方程解的存在性. 华侨大学学报(自然科学版), 1995, 16(3): 245 ~ 249
- 4 Sterling K B. Lectrue in functional analysis and operator theory. New York: Springer-Verlag. 1974. 1 ~ 10
- 5 Matsumoto K. Periodic distribution on C^* -algebra. J. of Math. Soc. of Japan, 1995, 47(4): 10 ~ 20

Hermitian Bilinear Functional Representation on Operator Algebra

Song Haizhou

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract Hermitian bilinear functional representation is given on shortcut process of operetor algebra. It is given from infinitely differentiable function space with compact support set or from rapidly descending infinitely differentiable function space. It provides a powerful tool to the generalized function on operator algebra.

Keywords C^* -algebra, positive definite, Hermitian bilinear functional, Fourier transform, translation invariant