

# 机械手奇异分析和判断\*

林 瑞 麟

( 华侨大学机械工程系, 泉州 362011 )

**摘要** 采用离散方法将机械手系统分离成几个子系. 通过对子系奇异的研究, 分析整体系统的奇异问题, 免去了求机械手系统雅可比矩阵的麻烦, 因而简化了计算. 它特别适合于球形手腕机械手的奇异判断.

**关键词** 机械手, 奇异判断, Jacobian 矩阵

**分类号** TP 241. 2

设机械手为刚性杆经关节连接的机械系统, 其运动链是连续的, 每一连杆提供的几何约束限制两个相连杆的相对运动自由度. 将基础连杆的始端固连于系统的支柱上, 末端夹持器自由运动以完成操作工作, 并由关节坐标来描述关节的平移或转动的运动特征, 使机械手末端操作器在空间三维坐标中得到所希望的任意位置和姿态. 一个连续的操作其最低限度必须有六个关节, 其中最少有三个转动关节. 操作器的奇异位置, 使机械手短暂地失去一个或多个自由度. 一旦操作器失去自由度, 沿着移动或围绕转动方向的运动便不能进行或不能行使力(力矩)的作用. 出现奇异位置是在机械手的工作空间内部存在固有的控制上的问题. 当接近奇异位置时, 要使末端操作器作很小的位移, 关节必须产生相当大的运动速度. 在极限范围碰到奇异位置, 关节所需运动速度就变成无限大了. 如某一机械手由运动方程求得  $\theta_4 = \cos\theta_5 \times (w_x)_d / \sin\theta_5 - \sin\theta_5 \times (w_y)_d / \sin\theta_5$ , 当  $\sin\theta_5 = 0$  时, 有限的  $(w_x)_d$  和  $(w_y)_d$  要求  $\theta_4$  趋于无限大;  $\theta_5 = 0$  或  $180$  时, 手腕处于奇异位形. 过渡的输出隐含着关节的运作空间位置趋向于奇异位形, 一个或更多的执行机构达到饱和极限, 末端执行器便偏离了规定的轨道. 关于空间连杆奇异性问题, Sugimoto(1982), Waldron(1985), Litvin(1986) 等学者已进行过研究. 早期努力的焦点取决于 Jacobian matrix, 末端夹持器的位形依赖于关节坐标求根的函数关系, 近期更多的努力则用几何逼近于六杆操作器的奇异分析. 另一种近似方法, 是运用坐标变换直接导出系统奇异的矩阵公式, 其奇异的判断为 Jacobian matrix 秩欠缺的位置<sup>[1-3]</sup>. 本文的特点是分别研究手臂和手腕子系统的奇异, 再通过子系统的奇异位形来确定机械手系统的奇异. 这是判断机械手奇异效率较高的方法.

## 1 手臂奇异

设定机械手杆之间的连接通过关节, 连杆顺序号从基端  $O$  到末端杆, 如关节  $i$  连接杆  $(i-$

1) 和杆  $i$ . 机械手几何运动的描述指定用笛卡尔坐标系  $(O_i, x_i, y_i, z_i) (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ , 规定每个连杆沿着  $Z$  轴移动或绕着它转动. 基坐标系  $(O_0, x_0, y_0, z_0)$  固连于支柱基础中, 最后坐标系  $O_n$  固连于夹持器特定位置上. 杆系  $i$  相对于系  $(i-1)$  的位置和姿态由参数  $\Phi, r_i, d_i, \alpha$  表征,  $r_i$  和  $\alpha$  是杆  $i$  和  $(i-1)$  之间的距离和角度 ( $x$  轴之间角位移),  $d_i$  为杆  $i$  的长度,  $\Phi$  为  $i$  系与  $(i-1)$  系中  $Z$  轴的扭转角. 取关节坐标值  $q_i$  对于转动关节, 它表示绕  $Z_{i-1}$  轴的角位移 ( $\Phi$ ); 对于移动关节, 它表示沿  $Z_{i-1}$  轴的移动长度 ( $r_i$ ). 由  $q = [q^1, \dots, q^n]^T$  确定关节机构的空间位形. 取一个由手臂装置和手腕装置组成的机械手机构 RCCRRR 如图 1 所示, 其运动参数综合于附表 ( $i$  为连杆). 其中第二、三关节为移动关节, 其它关节为转动关节, 机械手的空间构形取决于  $q = [\Phi, r_2, r_3, \Phi_4, \Phi_5, \Phi_6]^T$ . 第六关节机械手由前三个关节组成手臂, 其余的三个转动关节组成手腕; 手臂决定了末端装置在运动空间特殊点的位置, 手腕主要决定末端装置的姿态.

当位置发生奇异时, 对应地失掉一个或更多的位置自由度. 此时末端夹持器并不沿着某个方向移动. 同样, 当姿态发生奇异时对应地失掉最少一个姿态自由

附表 机械手运动参数

$i$	$\Phi$	$r_i$	$d_i$	$\alpha / (^\circ)$
1	$q_1$	0	0	0
2	0	$q_2$	0	-90
3	-90°	$q_3$	$L_1$	0
4	$q_4$	$L_3$	$L_2$	-90
5	$q_5$	0	0	90
6	$q_6$	0	0	0

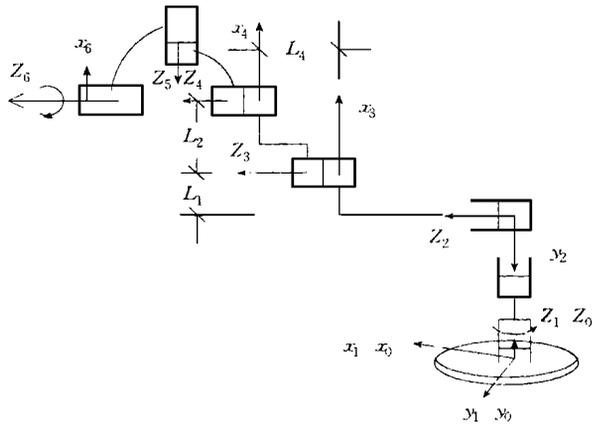


图 1 RCCRRR 机械手

度, 此时末端夹持器并不绕某个轴转动.

姿态 (或位置) 自由度的消失并不对应于手臂 (或手腕) 的奇异点, 可以设定当手臂关节运动时, 手腕关节保持不动, 反之亦然.

当手臂和手腕关节相耦合, 由于它们之间彼此的作用和影响, 机械手形成了它们整体的新奇异点, 或许使手臂和手腕潜在的奇异在整体结构中相互消去. 当手臂的位置能力消失而能从相邻手腕得到补偿时, 手臂和手腕的奇异便可消去. 一般情况, 机械手整体的奇异是与手臂或手腕的奇异点相一致的.

现单独研究手臂子系统及其计算. 由于手臂关节引起终端杆的线速度, 使坐标系  $O_3$  附在手臂杆的末端. 手臂的特征由关节参量  $q_a = (q_{a1}, q_{a2}, q_{a3})$  表示, 手臂末端杆的线速度用  $S_{a3}$  表示, 且由手臂关节速度和手臂构形所决定的雅可比矩阵计算 ( $J_a(q_a) \in R^{3 \times 3}$ ). 有

$$\dot{S}_{a3} = J_a(q_a) \dot{q}_a, \tag{1}$$

式中  $O_i$  系原点的位置矢量为

$$S_i^T = \begin{bmatrix} d_i \cos \Phi \\ d_i \sin \Phi \\ r_i \end{bmatrix}.$$

$$A_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos \Phi & -\cos \alpha \sin \Phi & \sin \alpha \sin \Phi \\ \sin \Phi & \cos \alpha \cos \Phi & -\sin \alpha \cos \Phi \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

位置和姿态的计算为

$$S_i = S_1 + A_1 S_2 + \dots + \dots A_{i-1} S_i^{i-1}, \quad A_{ij} = \prod_{\lambda=i}^{j-1} A^{\lambda, \lambda+1}.$$

式(1)中在  $\det[J_a] = 0$  的位置手臂处于奇异, 此时手臂末端杆不能沿着一定的方向移动, 手臂构形可能是任意两移动关节轴变成平行, 或任意两转动关节轴变成共线. 对于前述 RCCRRR 机械手的例子, 确定前面三杆组成手臂, 其空间构形为  $q_a = (o_1, r_2, r_3)$ . 手臂的雅可比矩阵为

$$J_a(q_a) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

手臂外形结构对应于奇异位置的点为  $\det[J_a(q_a)] = q_3 = 0$ .

## 2 手腕奇异

除手臂关节之外其余的关节组成手腕子系统, 由关节坐标  $q_b = (q_{b1}, q_{b2}, q_{b3})$  描述手腕的特征. 每个关节运动轴线分别用  $Z_{b0}, Z_{b1}, Z_{b2}$  表示, 手腕决定了终端夹持器的姿态, 它需要有三个自由度, 因此腕关节必需为转动关节. 现研究仅仅由于手腕关节的运动而引起末端杆的角速度, 因在坐标运动期间手腕末端杆的角速度是关联到手腕关节的速度, 以及由手腕构形而决定的雅可比阵 ( $J_b \quad R^{3 \times 3}$ ), 有

$$w_{b3} = J_b(q_b) \dot{q}_b. \quad (3)$$

由于手腕关节轴与杆坐标系的  $Z$  轴一致, 每一矩阵的列  $J_b \quad R^{3 \times 1} (i = 1, 2, 3)$  为

$$J_b = Z_{bi-1}. \quad (4)$$

当  $\det[J_b] = 0$ , 手腕对应的姿态发生奇异, 此时手腕子系中任意两转动关节轴变成平行. 当手腕的奇异发生而又不能从手臂得到能级补偿时, 至少失去一个末端夹持器的姿态自由度.

研究上述 RCCRRR 的例子, 确定由后面三个关节连杆组成手腕, 由其形成末端夹持器的姿态. 空间构形由  $q_b(\Phi, \Phi, \Phi)$  描述, 手腕的雅可比矩阵根据方程(4)在系  $O_3$  中表示为

$$J_b(q_b) = \begin{bmatrix} 0 & -S_4 & C_4 S_5 \\ 0 & C_4 & S_4 S_5 \\ 1 & 0 & C_5 \end{bmatrix},$$

式中  $C_4, S_4, S_5$  分别为  $\cos \Phi, \sin \Phi, \sin \Phi$ . 手腕在奇异点位置,  $\det[J_b(q_b)] = -S_5 = 0$ , 则  $\Phi$  等于  $0^\circ$  (或  $180^\circ$ ), 第一个和最后一个腕关节轴变成平行.

## 3 机械手的奇异

手腕与手臂的连接构成一个较高耦合系统的操作器, 手臂运动的位置可以更改末端操纵装置的姿态. 同样, 手腕的运动姿态可以影响末端操作装置的位置, 扩展子系统的雅可比矩阵, 得到机械手末端夹持器的运动分量为

$$\begin{bmatrix} V_n \\ w_n \end{bmatrix} = J(q) \dot{q} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_a \\ \dot{q}_b \end{bmatrix}, \quad (5)$$

式中  $\dot{q}_a$  为手臂关节速度,  $\dot{q}_b$  为手腕关节速度.

$J(q)$  中第一列 ( $6 \times 3$ ) 单元  $J_1, J_3$  受到手臂关节运动的影响, 同样  $J(q)$  的第二列 ( $6 \times 3$ )  $J_2, J_4$  受到手腕关节运动的影响. 实际上当腕速  $\dot{q}_b$  为零时, 手臂端速度  $\dot{q}_{a3}$  并不等于机械手末端速度  $V_n$ , 即

$$\dot{q}_{a3} - V_n | \dot{q}_b = 0,$$

而当手臂速度  $\dot{q}_a$  等于零时, 手腕的转速  $w_{b3}$  却等于机械手末端的角速度

$$w_{b3} = w_n | \dot{q}_a = 0.$$

为了便于分离计算, 将末端夹持器参考系  $O_6$  原点的线速度  $V_n$  转换为手臂  $O_3$  系原点的速度  $V_{a3}, V_{a3} = S_{a3}$ . 与此同时, 雅可比矩阵  $J(q)$  也应作相应变换, 即用  $J^*(q)$  表示为

$$J^*(q) = \begin{bmatrix} J_{a1} & J_{b2} \\ J_{a3} & J_{b4} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

式(5)变为

$$\begin{bmatrix} V_{a3} \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{a1} & J_{b2} \\ J_{a3} & J_{b4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_a \\ \dot{q}_b \end{bmatrix}. \quad (7)$$

在式(6), (7) 中,  $J_{a1} = J_a(q_a), J_{b4} = J_b(q_b), J_{a3}$  矩阵中每一列

$$[J_{a3}]_i \quad R^{3 \times 1} (i = 1, 2, 3), \quad J_{a3} = \sigma_i Z_{ai-1}.$$

当关节  $i$  为转动关节,  $\sigma_i = 1$ ; 是移动关节,  $\sigma_i = 0$ .

$$J_{b2} = Z_{bi-1} \times (S_{a3} - S_{bi-1}),$$

式中  $S_{a3}$  为手臂  $O_3$  系原点位置矢量,  $S_{bi-1}$  为手腕参考系  $O_{i-1}$  的位置矢量,  $Z_{bi-1}$  为腕关节轴矢量, 矩阵列  $[J_{b2}]_i \quad R^{3 \times 1} (i = 1, 2, 3)$ . 当手腕系统为球形机构时, 腕关节轴矢量  $Z_{bi-1}$  相交于共同点, 且  $(S_{a3} - S_{bi-1})$  平行于  $Z_{bi-1}$ . 此时  $J_{b2} = 0$ , 则

$$\det[J^*] = \det[J_a] \cdot \det[J_b]. \quad (8)$$

要判断机械手的奇异位置, 可以使

$$\det[J^*] = 0 \quad (9)$$

来确定. 当出现奇异的情形, 任意两移动关节轴变成平行, 或任意两转动关节轴变成共线. 可以看出, 用分离的方法将机械手分离成手臂和手腕两个子系统, 分别列出它们的雅可比矩阵, 便可判断整体系统的奇异点. 由于分离子系统仅三个关节机构, 因而雅可比矩阵的排列及奇异的计算比其它方法要简单许多. 它可以证明一个平移关节作用的结果——在手腕的雅可比矩阵中有一零的列存在于展开式中. 当机械手有两个平行的转动关节, 在手腕的雅可比阵中就有两个对应的列平行. 以上的两种情况, 均可对矩阵进一步进行简化.

例如机械手 RCCRRR 为球形手腕时的雅可比阵为

$${}^3J(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -S_4L_2 & 0 & 0 \\ -q_3 - L_3 & 0 & 0 & C_4L_2 & 0 & 0 \\ S_4L_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -S_4 & C_4S_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_4 & S_4S_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & C_5 \end{bmatrix}.$$

可得

$$\det[{}^3J] = - (q_3 + L_3) S_5. \quad (10)$$

机械手发生奇异的位置为  $\det[J] = - q_3 S_5 = 0$ . 这与前面所得到的  $\det[J_a(q_a)] = q_3 = 0$  及  $\det[J_b(q_b)] = - S_5 = 0$ , 代入式(8), (9)后所得结果是一致的. 于此, 可以不必求出机械手整体的雅可比矩阵, 而通过子系统便可获得机械手的奇异位置.

## 4 子系与整体系统奇异的制约关系

机械手整体系统与手臂和手腕子系统奇异点的关系, 可以分为下面几种情况. 一般情况, 机械手可能产生的位置和姿态的奇异是手臂和手腕形成奇异的组合, 这就是由初始的手臂和手腕子系的奇异扩展到机械手整体系统相等程度的奇异, 其奇异位置由式(9)判断.

第二种情况是手臂和手腕子系的初始奇异, 在机械手整体系统这一层它们的组合成地对地相消. 此时机械手的 Jacobian 有逆矩阵  $J^{-1}$  存在, 用手臂和手腕的 Jacobians 表示机械手整体的 Jacobian, 即

$$J(q) = \left[ \begin{array}{c|c} J_{a1} & J_{b2} \\ \hline J_{a3} & J_{b4} \end{array} \right].$$

定义去耦 Jacobian 用  $J_d$  表示为

$$J_d = \left[ \begin{array}{c|c} J_{a1} & 0 \\ \hline J_{a3} & J_{b4} \end{array} \right]. \quad (11)$$

在子系手臂或手腕处于奇异位形, 而机械手整体系统却是非奇异位形的情况下, 表达式应为

$$\det[E + J^{-1}(J_d - J)] = 0, \quad (12)$$

式中  $E$  为单位矩阵,  $E \in R^{6 \times 6}$ . 设机械手腕部为非球形腕, 附表中  $r_6$  设定为  $L_4$ , 据式(6), (11), (12)可求得

$$\det[E + {}^3J^{-1}({}^3J_d - J)] = \frac{q_3 S_5}{(q_3 + L_3) S_5 - L_2 C_4^2 C_5} = 0.$$

第三种机械手整体系统与子系统的奇异关系, 存在相反的情况, 即手臂和手腕在运行的初况可以举个实例说明. 设手臂子系第三杆末端的运动用三次参数曲线  $x = f_1(t)$  表示, 手腕子系也可将手腕末端的姿态旋量映射到对偶空间, 得到对应点  $b_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , 它的运动轨迹也可用三次参数曲线  $y = f_2(t)$  表示. 又设

$$x = f_1(t) = 1.78t - \frac{1}{2}3.7t^2 + \frac{1}{6}0.4t^3,$$

$$y = f_2(t) = 0.35 + 0.27t + \frac{1}{2}5t^2 - \frac{1}{6}23t^3.$$

取  $a_1 = 1.78$ ,  $a_2 = 3.7$ ,  $a_3 = 0.4$ ,  $b_1 = 0.27$ ,  $b_2 = 5$ ,  $b_3 = -23$ , 则函数  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  的型数值为

$t$	0	0.16	0.33	0.50	0.66	0.76	0.83	0.86	1
$x$	0	0.238	0.388	0.436	0.390	0.315	0.242	0.208	0
$y$	0.35	0.442	0.574	0.631	0.516	0.318	0.106	0	

上面两条曲线  $x = f_1(t)$  及  $y = f_2(t)$  均为圆滑曲线(图2), 没有发生奇异位形, 但它们组合后的曲线出现尖点. 将  $(a_1, a_2, a_3)$  和  $(b_1, b_2, b_3)$  值代入仿射变换式<sup>[1]</sup>,  $I = (q/p) - 2r/p$ ,  $p = a_2 b_3 -$

$a_3b_3$ ,  $q = a_3b_1 - a_1b_3$ ,  $r = a_1b_2 - a_2b_1$ , 得相对仿射不变量  $I = 0$ , 可以确定  $t = 0.5$  时出现奇点.

当手臂和手腕都处于非奇异位形, 此时逆矩阵  $J_d^{-1}$  存在, 机械手整体发生奇异位形的表达式为

$$\det[E + J_d^{-1}(J - J_d)] = 0. \quad (13)$$

式(12), (13) 表示子系统奇异与机械手整体系统奇异不一致时的等效位形条件.

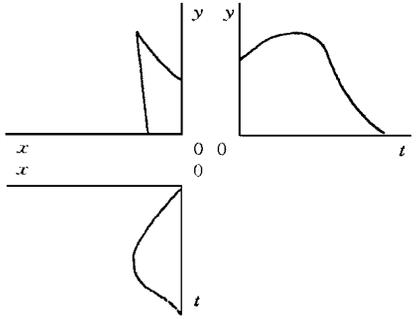


图 2 三次参数曲线

## 5 结论

本文将机械手分离成几个子系统, 分别研究它们的奇异, 再综合为机械手整体系统的奇异, 避免了求整体系统的雅可比矩阵. 当机械手的杆件较多时, 求其雅可比矩阵就比较复杂, 要耗费许多冗长的计算. 现在采用分离的方法, 就使问题大大地简化, 而且便于程式化计算.

## 参 考 文 献

- 1 Gregory L, Richard P. Singularity avoidance and the control of an eight revolute-joint manipulator. The International Journal of Robotics Research, 1992, 11(6): 503~515
- 2 Litvin F L, Tan J. Singularities in motion and displacement functions of constrained mechanical systems. The International Journal of Robotics Research, 1989, 8(2): 30~43
- 3 Shamir T. The singularities of redundant robot arms. The International Journal of Robotics Research, 1990, 9(1): 113~121
- 4 林瑞麟, 蒋少茵, 林 碧. 旋量法在机器人动力学分析中的应用. 应用数学和力学, 1996, 17(1): 75~80
- 5 林瑞麟. B 样条曲线的奇点控制. 华侨大学学报(自然科学版), 1995, 16(1): 66~71

# Analysis and Judgement of the Singularities of Manipulators

Lin Ruilin

(Dept. of Mech. & Electr Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

**Abstract** A manipulator system is separated into several subsystems. The singularity of entire system is analyzed by studying the singularities of its subsystems. Thus the trouble of solving Jacobian matrix can be exempted and the computation simplified. The method is suited in particular for judging the singularity of spherical wrist manipulator.

**Keywords** manipulator, singularity, judgement, Jacobian matrix