

高阶抛物型方程恒稳的显式差分格式^{*}

曾 文 平

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

摘要 提出解高阶抛物型方程 $\partial u / \partial t = (-1)^{m+1} \partial^m u / \partial x^{2m}$ 的一类恒稳定的三层显式差分格式, 大大地改进了抛物型方程的网格积分法中格式的稳定性条件. 数值例子表明所作的稳定性分析是正确的.

关键词 高阶抛物型方程, 显式差分格式, 绝对稳定

分类号 O 241. 82

1960 年, CaA bT 在文 [1] 中讨论了如下的高阶抛物型方程初边值问题

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= (-1)^{m+1} \frac{\partial^m u}{\partial x^{2m}} & (0 < x < 1, 0 < t < T), \\ u(x, 0) &= f(x) & (0 \leq x \leq 1), \\ \frac{\partial^p u(0, t)}{\partial x^p} &= \frac{\partial^p u(1, t)}{\partial x^p} = 0 & \left[\begin{array}{l} p = 0, 1, \dots, m-1 \\ 0 \leq t \leq T \end{array} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

提出了一个含权因子 $\alpha (0 \leq \alpha \leq 1)$ 的两层差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} = \alpha (-1)^{m+1} \frac{\delta_x^{2m} u_j^{n+1}}{h^{2m}} + (1 - \alpha) (-1)^{m+1} \frac{\delta_x^{2m} u_j^n}{h^{2m}} \quad (2)$$

(初边值条件的离散化处理同文 [1], 从略, 下同), 其中 k, h 分别为时间 t 及空间 x 方向的步长, u_j^n 为 $u(jh, nk)$ 的差分逼近, δ_x^{2m} 表示 x 方向的 $2m$ 阶中心差分算子. 该格式当 $1/2 \leq \alpha \leq 1$ 时为无条件稳定, 而当 $0 \leq \alpha < 1/2$ 时其稳定的充要条件为

$$r = k/h^{2m} \leq 1/(1 - 2\alpha) 2^{2m-1}.$$

当 $\alpha = 0$ 时为隐式格式, 需解线性方程组, 计算量较大; 仅当 $\alpha = 1$ 时为显式格式, 但其稳定性条件十分苛刻, 为 $r \leq 1/2^{2m-1}$, 它随方程阶数的增加而呈指数增加. 因此, 寻找方程(1)的高稳定性甚或绝对稳定的显式格式便具有十分重要的理论意义及实用价值.

本文利用加耗散项(人工粘性项的方法), 通过适当选取参数, 构造了一个无条件稳定的三层显式差分格式, 从而大大地改进了文 [1] 的结果.

1 差分格式的构造

对高阶抛物型方程(1)的左边用关于 t 的向前及向后差商的加权平均代替, 右端引入耗散

项 $-\beta r k \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}$, 然后分别用关于 x 及关于 t 的中心差商代替 $\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}$. 于是, 得如下三层显式差分格式为

$$\alpha \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + (1 - \alpha) \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{k} = (-1)^{m+1} \frac{\delta_x^{2m} u_j^n}{h^{2m}} - \beta r k \frac{\delta_x^2 u_j^n}{k^2}, \quad (3)$$

其中 δ_x^{2m} 为关于 x 的 $2m$ 阶中心差分算子, δ_x^2 为关于 t 的二阶中心差分算子, α, β 为待定参数. 易证, 当 $\alpha = 1/2$ 时其局部截断误差为 $O(k + h^2 + (k/h^m)^2)$. 当 $\alpha = 1/2$ 时为 $O(k^2 + h^2 + (k/h^m)^2)$ 且当 $k = O(h^{m+1})$ 时它相容于方程(1).

2 差分格式的稳定性

为研究差分格式的稳定性, 需如下的 Miller 准则.

引理^[1] 设 $A > 0$, 实系数二次方程

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

的两根按模, 小于或等于 1 的充要条件为

$$\begin{cases} A - C > 0, \\ A + B + C > 0, \\ A - B + C > 0. \end{cases}$$

现在用 Fourier 方法^[1], 分析差分格式(3)的稳定性. 令 $u_j^n = \lambda^n e^{i\theta}$ (其中 $i = \sqrt{-1}$, $\theta < \pi$), 代入格式(3), 得其传播矩阵为

$$G(\Delta, j) = \begin{bmatrix} -\frac{B}{A} & -\frac{C}{A} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

其特征方程为

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0. \quad (5)$$

在式(5)中

$$\begin{cases} A = \alpha + \beta r, \\ B = 1 - 2(\alpha + \beta r) + (4s^2)^m r, \\ C = \alpha + \beta r - 1, \end{cases} \quad (6)$$

其中 $s = \sin(\frac{\theta}{2})$. 显见, 当 $\alpha > 0, \beta > 0$ 时恒有

$$\begin{aligned} A &= \alpha + \beta r > 0, \\ A - C &= 1 > 0, \\ A + B + C &= (4s^2)^m r > 0. \end{aligned}$$

又当 $\alpha = 1/2, \beta = 4^{m-1}$ 时, 有

$$A - B + C = 2(2\alpha - 1) + r(4\beta - (4s^2)^m) = 0$$

满足引理条件. 故由引理知, 当参数 $\alpha = 1/2, \beta = 4^{m-1}$ 时, 特征方程(5)的两根按模小于或等于 1.

1. 又这时有 $\frac{C}{A} = \frac{\alpha + \beta r - 1}{\alpha + \beta r} < 1$, 由韦达定理知, 至少有一根位于单位圆内. 于是, 根据分离变量法的基本理论有

定理 当 $\alpha = 1/2$ 且 $\beta = 4^{m-1}$ 时三层显式差分格式(3)绝对稳定.

特别地, 当 $m = 1$ 时, 如果 $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 4 \cong 1$, 则格式(3) 恰为二阶抛物型方程 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的 Dufort-Frankel 格式. 因此, 本定理包含了 Dufort-Frankel 格式. 然而, 当 $m \geq 2$ 时的 Dufort-Frankel 型格式则是不稳定的. 事实上, 若格式(3) 当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时, 而其右端项中 u_i^n 的系数和为 0, 即 $(-1)^{m+1}(-1)^m C_{2m}^m + 2\beta = 0$. 由此可得 $\beta = \frac{1}{2} C_{2m}^m = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2m)!}{(m!)^2} 4^{m-1}$ (等号当且仅当 $m = 1$ 时成立), 从而除 $m = 1$ 外均不满足稳定性条件 $\beta \leq 4^{m-1}$.

文 [4] 定理 5 为本文结果当 $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \alpha$ 时的特例.

3 数值例子

考虑四阶抛物型方程初边值问题

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} &= 0 \quad (0 < x < \pi, 0 < t < T), \\ u(x, 0) &= \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi), \\ u(0, t) &= \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} = u(\pi, t) \\ &= \frac{\partial^2 u(\pi, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (0 \leq t \leq \pi), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其精确解为 $u(x, t) = e^{-t} \sin x$.

将格式(3) 改写为

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{\alpha + \beta} \{ (2\alpha + 2\beta - 1) u_j^n - r \delta_x^4 u_j^n + (1 - \alpha - \beta r) u_j^{n-1} \} \quad (j = 1, 2, \dots, M-1). \quad (8)$$

而初边界条件按文 [4] 处理为

$$u_j^0 = \sin j \Delta x \quad (j = 0, 1, \dots, M-1), \quad (9)$$

$$u_0^n = u_M^n = 0, u_{-1}^n = -u_1^n, u_{M+1}^n = -u_{M-1}^n, \quad (10)$$

其中 $r = k/h^4$, $M = 50$, $\delta_x^4 u_j^n = u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + 6u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n$.

由于格式(3) 为三层格式, 故除初始层网格函数值为已知外, 尚需用其他方法先算出第一层网格函数值. 为简便计, 这里假定第一层网格函数值也按精确值进行计算.

下面分别列出精度比较表(表 1) 和稳定性比较表(表 2). 为节省篇幅起见, 仅列出在一点 $x = 0.32\pi$ 处的绝对误差, 等于精确解减去差分格式解的数值.

表 1 显式格式(3) 取不同参数值时的精度比较表($\Delta x = \frac{\pi}{50}$, $r = \frac{1}{8}$, $x = 0.32\pi$)

α	β	n		
		100	500	1000
1/2	4	- 0.447 035 E- 06	- 0.298 023 E- 05	- 0.610 948 E- 05
1	4	- 0.596 040 E- 06	0.312 924 E- 05	- 0.625 849 E- 05
5/8	4	- 0.632 471 E- 06	- 0.316 567 E- 05	- 0.629 491 E- 05
1/2	33/8	- 0.582 750 E- 06	- 0.311 595 E- 05	- 0.624 519 E- 05

表 2 显式格式(3)取不同参数值时的稳定性比较表($\Delta x = \frac{\pi}{50}, n = 1\,000$)

α	β	$r = 5$ 且 $x = 0.32\pi$	$r = 10$ 且 $x = 0.32\pi$
1/2	4	0.566 826 E- 05	0.104 44 E- 04
1	4	0.110 269 E- 05	0.131 058 E- 05
5/8	4	0.193 297 E- 05	0.876 784 E- 05
1/2	33/8	0.109 863 E- 05	0.892 285 E- 06
1/2	3		
3/8	4		
0	4	上 溢	上 溢
1/2	2		
1	0		

由表看出, 计算结果与理论分析相符合 .

参 考 文 献

1 Ca A bB B K 著 . 抛物型方程的网格积分法 . 袁兆鼎译 . 北京: 科学出版社, 1963. 143 ~ 153

2 Miller J J H. On the location of zeros of certain classes of palynomials with application to numerical analy – sis. J. Inst. Math. Appl. , 1971, (8) :394 ~ 406

3 Richtmyer R D, Morton K W. Difference method for initial-Value problems , 2nd ed. New York: Wiley . 1967. 38 ~ 91

4 曾文平 . 高阶抛物型方程的具有高稳定性的显式与半显式差分格式 . 应用数学学报, 1996, 19(4): 631 ~ 634

Absolutely Stable Explicit Difference Scheme for Sloving
Parabolic Equation of Higher Order

Zeng Wenping

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract A class of absolutely stable three-layer explicit difference schemes are presented for solving parabolic equations of higher order $\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^{m+1} \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}$. The stability condition of the scheme in reference (1) is thus greatly improved. The correctness of the stability analysis made by the author is clearly stated by numerical examples.

Keywords parabolic equation of higher order, explicit difference scheme, absolutely stable