第 19 卷　第 2 期　　华 侨 大 学 学 报 (自 然 科 学 版)　　Vol. 19　No. 2
1998 年 4 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Apr. 1998

极值 I 型变异系数估计*

程　细　玉

(华侨大学应用数学系, 泉州 362011)

摘要　利用随机变量变换, 分别在完全样本和第 II 型截尾样本的情形下, 得到一个求极值 I 型变异系数的置信限的一个简便而有效的办法 .

关键词　极值 I 型分布, 变异系数, 估计

分类号　O 213. 2

极值 I 型分布是可靠性研究中的一个极为重要的分布 . 例如, 在结构应力–荷载模型的研究中, 常把荷载看成是一个极值分布. 在结构可靠性设计中极值分布与正态分布一样, 均为常见的分布类型 . 在文 [1] 中, 作者利用结构可靠性设计方法, 对于位置尺度分布族给出了一般的设计标准 . 但其中的变异系数(包括极值 I 型分布) 的估计在实际中是十分困难的, 迄今为止尚未有行之有效的办法 [2]. 文 [3] 提出一种极值 I 型变异系数的估计方法, 但需要在完全样本情形下, 且事先要给出相应的 Weibull 分布的可靠度, 所以并不具备实用性 . 此外, 极值 I 型分布参数(包括变异系数) 在寿命估计中也是比较常见的 [4]. 鉴于上述情形, 本文利用变换, 得到了极值 I 型变异系数的置信限 . 实例计算表明, 此方法具有很好的实用性, 其点估计为 MLE, 区间估计的上下置信限也比较接近最大似然估计 .

1　假定与定理

在本节, 设母体 X 服从分布密度

$$f_X(x) = 1/\sigma \quad \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad \exp\left\{-\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\},$$

其中 $-\infty < x < +\infty, -\infty < \mu < +\infty, \sigma > 0$.

以 V_x 表示母体 X 的变异系数, 则有

引理 1　$V_x = \pi/\sqrt{6}\,(\delta_1 + c)$, 其中 $\delta_1 = \mu/\sigma, c \approx 0.577\ 216$, c 为 Euler 常数 .

证明　$V_x = \sqrt{var(X)}/E(x) = \pi/\sqrt{6} \cdot \sigma/(\mu + c\sigma) = \pi/\sqrt{6}\,(\delta_1 + c)$.

引理 2　令 $Y = e^{-X}$, 并设 $\alpha = 1/\sigma, \delta = \exp(\mu/\sigma)$, 则 Y 的密度函数为 $f_Y(y) = \alpha \cdot y^{\alpha-1} \cdot \delta \cdot \exp(-\delta y^{2})$.

证明　$f_Y(y) = \alpha \cdot \exp[-(-\ln y - \mu)/\sigma] \cdot \exp\{-\exp(-(-\ln y - \mu)/\sigma\} \cdot y^{-1} = \alpha \cdot y^{\alpha} \cdot$

* 本文 1997–10–16 收到;

$\delta \cdot \exp\{-\delta y^2\} \cdot y^{-1} = \alpha \cdot \delta \cdot y^{\alpha-1} \cdot \exp\{-\delta y^2\}$.

由引理 2 的结果不难知道, 如果引用引理 2 的记号, 应有:

引理 3 $Y = Y^{\alpha}$ 的密度函数为 $F_Y(t) = \delta e^{-\delta t}$, 其中 $t \geq 0$.

引理 4 以 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 表示从母体 X 中得到的第 II 型截尾样本, 则参数 μ, σ 的 MLE $\tilde{\mu}$ 及 $\tilde{\sigma}$ 满足 $\tilde{\mu} = \ln\tilde{\lambda}$, $\tilde{\sigma} = 1/\tilde{\alpha}$. 在上式中, $\tilde{\lambda}$ 和 $\tilde{\alpha}$ 满足下述的式(1)与式(2).

$$r/\alpha + r\ln\lambda + Z\ln Y_i - \lambda^{\alpha} Z Y_i^{\alpha} \ln\lambda Y_i - (n-r)(\lambda Y_r)^{\alpha} \ln\lambda Y_r = 0, \tag{1}$$

$$r\alpha/\lambda - \alpha\lambda^{\alpha-1} Z Y_i^{\alpha} - (n-r) Y_r^{\alpha} \alpha \lambda^{\alpha-1} = 0, \tag{2}$$

式中 $Y_i = \exp\{-x_i\}$, $i = \overline{1, r}$.

证明 $Y = e^{-X} \sim \alpha \cdot \lambda^{\alpha} \cdot y^{\alpha-1} \cdot \exp(-(\lambda y)^{\alpha}\} = f_Y(y)$, 式中 $\lambda = e^{\mu}$, $\alpha = 1/\sigma$. 对应于诸 x_i, 把 $Y_i = e^{-x_i}$ 看成从母体 $f_Y(y)$ 中抽取的第 II 型截尾样本, 则其似然函数为 $L = \alpha^r \cdot \lambda^{\alpha r} \cdot \prod_i (y_i^{\alpha-1} \cdot \exp\{(-(\lambda y_i)^{\alpha}\}) \cdot \exp\{(-(n-r)(\lambda Y_r)^{\alpha}\}$, 故

$$\ln L = r\ln\alpha + r\alpha\ln\lambda + (\alpha - 1) Z\ln Y_i - \lambda^{\alpha} Z Y_i^{\alpha} - (n-r)(\lambda Y_r)^{\alpha}.$$

由 $\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = 0$ 及 $\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = 0$, 立得式(1)及式(2), 故引理 4 的结论成立.

此外, 可以证明此方程的解是唯一的. 特别地, 当 $r = n$, 即在完全样本情形下 $\tilde{\lambda}$ 及 $\tilde{\alpha}$ 由式(3)及式(4)确定.

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{n}\sum_i \ln Y_i - \sum \ln Y_i^{\alpha} \ln Y_i / \sum \ln Y_i^{\alpha} = 0, \tag{3}$$

$$\lambda = \left(\frac{n}{\ln Y_i^{\alpha}}\right)^{1/\alpha}. \tag{4}$$

定理 1 设 $X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(r)}$ 为来自母体 X 的第 II 型截尾样本 1 则极值 I 型分布 X 的变异系数 V_x 的水平 $1-\gamma$ 的置信上限为

$$U_v = \pi/\sqrt{6}\{c + \ln\chi^2_{2r}(\gamma) - \ln 2 - \ln[\sum_{i=1}^{r} e^{-x_i/\tilde{\sigma}} + (n-r)e^{-x_r/\tilde{\sigma}}]\},$$

其中 $\tilde{\sigma}$ 由引理 4 确定. $\chi^2_{2r}(\gamma)$ 满足 $P\{\chi^2_{2r} \geq (1-\gamma)\} = 1-\gamma$.

证明 $X_1, X_2, \cdots, X_r$ 为第 II 型截尾样本, 则由引理 4 可以确定参数 μ, σ 的最大似然估计 $\tilde{\mu}$ 及 $\tilde{\sigma}$. 由引理 2, $e^{-x/\tilde{\sigma}}$ 近似服从指数分布. 令

$$T_r = \sum_{i=1}^{r} \exp(-x_r/\tilde{\sigma}),$$

则有 $2\delta T_r \sim \chi^2_{2r}$, 其中 $\delta = e^{\mu/\sigma}$.

对于给定的置信水平 $1-\gamma$, 有

$$P\{2\delta T_r \geq \chi^2_{2r}(1-\gamma)\} = 1-\gamma,$$

故 $P\{\delta_1 \geq \ln\chi^2_{2r}(1-\gamma) - \ln 2 - \ln T_r\} = 1-\gamma$, 其中 $\delta_1 = \mu/\sigma = \ln\delta$.

由引理 1 知 $V_x = \pi/\sqrt{6}(\delta_1 + c)$, 立得 V_x 的水平 $1-\gamma$ 的置信上限为

$$U_v = \pi/\sqrt{6}\{c + \ln\chi^2_{2r}(1-\gamma) - \ln 2 - \ln T_r\}.$$

特别地, 当 $r = n$, 即在完全样本时, 有

定理 2 设 $X_1, \cdots, X_n$ 为来自母体 X 的 iid 样本, 则 V_x 的水平 $1-\gamma$ 的置信上限为

$$U_v = \pi/\sqrt{6}\{c + \ln\chi^2_{2r}(1-\gamma) - \ln\sum_{i=1}^{n}\exp(-x_r/\tilde{\sigma})\},$$

其中 $\tilde{\sigma}$ 由 $\tilde{\sigma} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i - \sum_{i=1}^{n}x_i\exp(-x_ri/\tilde{\sigma})/\sum_{i=1}^{n}\exp(-x_i/\tilde{\sigma})$ 确定.

2　算例

下面是一组取自母体 $X \sim f_X(x) = \frac{1}{\sigma}\exp(-\frac{x-\mu}{\sigma})\cdot\exp\{-\exp(-\frac{x-\mu}{\sigma})\}$ 的极值 I 型的完全样本数据. 即

$x_1 = 3.8959, x_2 = 3.5053, x_3 = 2.3477, x_4 = 6.100, x_5 = 4.024,$

$x_6 = 3.6810, x_7 = 4.1890, x_8 = 4.3177, x_9 = 3.7240, x_{10} = 5.8950,$

$x_{11} = 5.0897, x_{12} = 4.8830, x_{13} = 3.2014, x_{14} = 3.1615, x_{15} = 3.6872.$

利用式(3) 及式(4), 求得 μ 和 σ 的最大似然估计为 $\tilde{\mu} = 3.63, \tilde{\sigma} = 2.8833$, 变异系数的最大似然估计为 $\tilde{V}_x = 0.273$.

取 $n = 15, \gamma = 0.05, \chi^2_{2n}(1-\gamma)$ 满足 $P\{\chi^2_{2n} \geq \chi^2_{2n}(1-\gamma)\} = 1-\gamma$. 查 χ^2 分布的上侧分位表, 可知 $\chi^2_{30}(0.95) = 18.493, T_n = \sum_{i=1}^{n}\exp(-x_i/\tilde{\sigma}) = 0.246, \ln T_n = -1.40264$. 由定理 2 知 V_x 的水平 95% 的置信上限 U_v 为

$$\pi/\sqrt{6}(0.577 + 2.917 - 0.693 + 1.402) = 0.305.$$

又 $\chi^2_{30}(0.05) = 43.773$, 故 V_x 的 95% 的置信上限为

$$L_v = \pi/\sqrt{6}(0.577 + 3.779 - 0.693 + 1.402) = 0.253.$$

进一步, V_x 的 90% 的置信区间为(0.253, 0.305). 它的置信区间长度仅为 0.05, 置信上、下限均十分接近 $\tilde{V}_x$, 其结果应该是令人满意的.

本文为校科研基金资助项目.

参　考　文　献

1　程细玉. 位置尺度分布族的结构可靠性设计. 应用概率统计, 1992, (3): 269～273

2　戴树森. 可靠性试验及其统计分析. 北京: 国防工业出版社, 1983. 23～81

3　苏国钦. 极大值 I 型分布变异系数的置信限. 应用概率统计, 1991, (2): 133～134

4　吴绍敏. 系统可靠性增长的 Bayes 估计. 华侨大学学报(自然科学版), 1988, 19(1): 1～8

Estimating Variation Coefficient of Extremes Type I

Cheng Xiyu

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract　By applying transformation of random variable, a handy and effective method is obtained for solving fiducial limit of variation coefficient of extremes type I under total sample and truncated sample type II respectively.

Keywords　extremes, variation coefficient, estimation