第19卷 第2期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol.19 No.2
1998年4月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Apr. 1998

对流方程的分组显式方法*

郑兴华　曾文平

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

摘要　用显式及隐式迎风格式给出了求解对流方程 $\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}=0$ 的分组显式方法, 证明其相容性及(弱)稳定性, 数值例子表明该方法是有效的.

关键词　对流方程, 分组显式方法, 相容性, 稳定性

分类号　O 241.82

用时间相关法求解定态 Euler 方程一般都用隐式方法, 通常的隐式方法都不适用于并行计算. Evans 等[1]把求解抛物型方程的分组显式(GE)方法推广到求解一阶双曲型方程 $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0$. 由于 GE 方法具有良好的稳定性又是显式求解, 所以适用于并行计算. 但是, Evans 的 GE 方法中还存在着不足和错误, 陈景良、陆金甫[2~3]等发现了 Evans 的 GE 方法中的错误, 并给出了改进方法. 但文[1~3]都只考虑对流方程 $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0$ 的初边值问题.

本文考虑另一类对流方程的初边值问题

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad a<x<b,\ 0<t\leq T,\\ &u(x,0)=f(x) \quad a<x<b,\\ &u(b,t)=g(t) \quad 0<t\leq T.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

我们对问题(1)构造了 GE 方法, 它不同于通常的 GE 方法的不相容的特点, 而是相容的. 首先构造了 GE 方法并作相容性分析; 然后讨论了稳定性; 最后给出了数值例子. 实际计算表明, 我们所提的 GE 方法是有效的.

1　分组显式(GE)方法

设 τ 和 h 分别为时间步长和空间步长, 网格点 (x_j, t_n) $x_j=jh, j=0,1,\cdots,J, h=\frac{b-a}{J}$; $t_n=n\tau, n=0,1,\cdots,N=[T/\tau]$. 考虑任何两点组成一组 (x_{j+1},t_n), (x_j,t_n), 在 (x_{j+1},t_{n+1}), (x_j,t_{n+1}) 处分别采用显式迎风格式和隐式迎风格式, 可得其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\lambda & 1+\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{j+1}^{n+1}\\ u_j^{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\lambda & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{j+1}^{n}\\ u_j^{n}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\lambda u_{j+2}^{n}\\ 0\end{bmatrix}, \tag{2}$$

* 本文1997-10-22收到; 福建省自然科学基金资助项目

其中 $\lambda=\tau/h$. 由于二阶矩阵易于求逆, 故由式(2)可得式(3),(4)一组显式格式为

$$u_{j+1}^{n+1}=(1-\lambda)u_{j+1}^{n}+\lambda u_{j+2}^{n}, \tag{3}$$

$$u_{j}^{n+1}=\frac{\lambda(1-\lambda)}{1+\lambda}u_{j+1}^{n}+\frac{1}{1+\lambda}u_{j}^{n}+\frac{\lambda^{2}}{1+\lambda}u_{j+2}^{n}. \tag{4}$$

在(x_j,t_n)处进行Taylor级数展开得到式(3),(4)的局部截断误差分别为

$$T_{(3)}=\frac{1}{2}\tau\frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}}\bigg|_{(x_j,t_n)}-\frac{h}{2}\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}\bigg|_{(x_j,t_n)}+O(\tau^{2}+h^{2}), \tag{5}$$

$$T_{(4)}=\frac{1}{2}\tau\frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}}\bigg|_{(x_j,t_n)}-\frac{1+3\lambda}{1+\lambda}\frac{h}{2}\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}\bigg|_{(x_j,t_n)}+O(\tau^{2}+h^{2}). \tag{6}$$

由 $T_{(3)}$, $T_{(4)}$ 可知对任意网格比, 格式(3),(4)与微分方程(1)是相容的.

采用前面所述的网格剖分法, J 可分为偶数与奇数两种情况. 为节省篇幅起见, 这里仅讨论 J 为偶数的情况. J 为奇数的情况类似可得, 从略. 设 J 为偶数, 则内点数为奇数, 注意到 $u_J^n(0<n\leq N)$ 已由(1)中边值条件给定, 而 $u_0^n(0<n\leq N)$ 是不能由边值条件给定的. 因此, 实际上可以把(x_0,t_{n+1})看作一"虚拟"内点, 所有处理与其余内点一样, 这样共有偶数个内点 0, 1, 2, …, $j-1$.

(1) GEL 方法(靠近左边界的内点不成组的分组显式方法), 其形式为

$$\left.\begin{aligned}&u_{j}^{n+1}=(1-\lambda)u_{j}^{n}+\lambda u_{j+1}^{n}\\&(1+\lambda)u_{j-1}^{n+1}-\lambda u_{j}^{n+1}=u_{j-1}^{n}\end{aligned}\right\},\qquad j=J-1,J-3,\cdots,3,1. \tag{7}$$

(2) GER 方法(靠近右边界的内点不成组的分组显式方法), 其形式为

$$\left.\begin{aligned}&(1+\lambda)u_{J-1}^{n+1}=u_{J-1}^{n}+\lambda u_{J}^{n+1}\\&u_{j}^{n+1}=(1-\lambda)u_{j}^{n}+\lambda u_{j+1}^{n}\\&(1+\lambda)u_{j-1}^{n+1}-\lambda u_{j}^{n+1}=u_{j-1}^{n}\\&u_{0}^{n+1}=(1-\lambda)u_{0}^{n}+\lambda u_{1}^{n}\end{aligned}\right\},\qquad j=J-2,J-4,\cdots,2. \tag{8}$$

(3) (S)AGE(单交替分组显式)方法, 即按时间层交替使用 GEL 方法及 GER 方法.

(4) (D)AGE(双交替分组显式)方法, 即按时间层交替使用 GEL→GER→GER→GEL 方法.

2 GE 格式的稳定性分析

(1) GEL 格式的稳定性. 为此, 把 GEL 格式(7)写成矩阵形式有

$$(I+\lambda G_1)\boldsymbol{u}^{n+1}=(I-\lambda G_2)\boldsymbol{u}^{n}+\boldsymbol{b}_1^{n}, \tag{9}$$

其中

$$G_1=\begin{bmatrix}0&&&&&&\\-1&1&&&&&\\&&0&&&&\\&&-1&1&&&\\&&&&\ddots&&\\&&&&&0&\\&&&&&-1&1\end{bmatrix}_{J\times J},\qquad G_2=\begin{bmatrix}1&&&&&&\\&0&&&&&\\&-1&1&&&&\\&&&\ddots&&&\\&&&&0&&\\&&&&-1&1&\\&&&&&&0\end{bmatrix}_{J\times J},$$

$$\boldsymbol{u}^n = (u_{J-1}^n, u_{J-2}^n, \cdots, u_1^n, u_0^n)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{u}_1^n = (\lambda u_J^n, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}} \in R^J,$$

其传播矩阵为

$$\Gamma_{\mathrm{GEL}} = (I + \lambda G_1)^{-1}(I - \lambda G_2)$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & & & & & & \\ \frac{\lambda(1-\lambda)}{1+\lambda} & \frac{1}{1+\lambda} & & & & & & \\ & \lambda & 1-\lambda & & & & & \\ & \frac{\lambda^2}{1+\lambda} & \frac{\lambda(1-\lambda)}{1+\lambda} & \frac{1}{1+\lambda} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \lambda & 1-\lambda & \\ & & & & & \frac{\lambda^2}{1+\lambda} & \frac{\lambda(1-\lambda)}{1+\lambda} & 1-\lambda \end{bmatrix}_{J\times J},$$

它为下三角阵, 特征值为

$$u_1 = 1 - \lambda\left(\frac{J}{2}\text{重}\right) \text{ 及 } u_2 = \frac{1}{1+\lambda}\left(\frac{J}{2}\text{重}\right).$$

易知, 如果 $\lambda = \frac{\tau}{h} \leq 2$, 则传播矩阵的谱半径 $\rho(\Gamma_{\mathrm{GEL}}) \leq 1$, 所以当 $\lambda = \frac{\tau}{h} \leq 2$ 时 GEL 格式(弱)稳定. 于是有

定理 1　GEL(GER) 格式(弱) 稳定性条件为 $\lambda = \frac{\tau}{h} \leq 2$.

(2) (S) AGE 方法的稳定性. (S) AGE 格式的矩阵形式为

$$\begin{cases} (I + \lambda G_1)\boldsymbol{u}^{n+1} = (I - \lambda G_2)\boldsymbol{u}^n + \boldsymbol{b}_1^n \\ (I + \lambda G_2)\boldsymbol{u}^{n+2} = (I - \lambda G_1)\boldsymbol{u}^{n+1} + \boldsymbol{b}_2^n \end{cases} \quad (n = 0, 2, \cdots),$$

传播矩阵为

$$\Gamma_{(\mathrm{S})\,\mathrm{AGE}} = (I + \lambda G_2)^{-1}(I - \lambda G_1)(I + \lambda G_1)^{-1}(I - \lambda G_2).$$

易得对任何网格比 $\lambda > 0$ 传播矩阵的谱半径 $\rho(\Gamma_{(\mathrm{S})\,\mathrm{AGE}}) = \left|\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right| \leq 1$, 即(S) AGE 格式无条件(弱) 稳定. 我们有如下定理

定理 2　(S) AGE((D) AGE) 格式是无条件(弱) 稳定的.

3　数值例子

例如, 考虑对流方程混合问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & 0 < x < 1, 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = \cos(x) & 0 \leq x \leq 1, \\ u(1, t) = \cos(1 + t) & t > 1. \end{cases}$$

它的解析解(附表) 为

$$u(x, t) = \cos(x + t).$$

附表　GE 格式数值解($\tau=0.015, h=0.01, \lambda=1.5, t=0.6$)

x_j	解析解	GEL 格式	GER 格式	(S) AGE 格式	(D) AGE 格式
0.0	0.825 333 56	0.822 871 59	0.822 933 31	0.828 416 23	0.824 608 46
0.1	0.764 842 19	0.762 557 26	0.762 614 46	0.767 705 41	0.764 165 77
0.2	0.696 706 71	0.694 623 71	0.694 675 81	0.699 324 15	0.696 087 78
0.3	0.621 609 97	0.619 775 24	0.619 746 95	0.623 955 12	0.621 054 71
0.4	0.540 302 31	0.538 623 43	0.539 427 12	0.542 351 74	0.539 816 27
0.5	0.453 596 12	0.452 537 00	0.451 596 53	0.455 329 76	0.453 513 84
0.6	0.362 357 75	0.361 599 22	0.361 785 54	0.363 757 85	0.361 995 18
0.7	0.267 498 83	0.267 077 56	0.267 071 56	0.264 233 10	0.267 361 35
0.8	0.169 967 14	0.169 783 35	0.169 783 37	0.170 345 03	0.169 913 05
0.9	0.070 737 02	0.070 694 79	0.070 694 79	0.070 785 59	0.070 714 33
SE①	–	0.004 201 76	0.004 227 06	0.003 332 59	0.001 243 28

① $SE=\{\sum_{j=1}^{J}[u(x_j,t_N)-u_j^N]^2\}^{1/2}$ 为离散的平方误差

参　考　文　献

1　Evans D J, Sahimic M S. Group explict methods for hyperbolic equations, Comput. Math Appl., 1988, 15: 659～697

2　陈景良. 双曲型方程的一个分组显式格式. 见华中理工大学数学系主编. 全国第三届并行计算学术论文集. 武汉: 华中理工大学出版社, 1992. 36～41

3　陆金甫, 肖世江. 对流方程的 GE 方法. 计算物理, 1995, 12(3): 355～362

Grouping Explicit Method for Solving Convection Equation

Zheng Xinghua　Zeng Wenping

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract　Based on explicit and implicit upwind schemes, a class of grouping explicit methods are given for solving convection equation $\partial u/\partial t-\partial u/\partial x=0$. The consistency and the stability of these methods are proved. Their effectiveness are clearly stated by numerical examples.

Keywords　convection equation, grouping explicit method, consistency, stability