第 19 卷　第 1 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 19　No. 1
1998 年 1 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jan. 1998

平面格图生成树的计数*

黄　鲤　颖

(华侨大学数学系, 泉州 362011)

摘要　设 $t(m,n)$ 和 $\bar{t}(m,n)$ 分别是平面 $m\times n$ 格图生成树和对称生成树的数目, 从而给出了 $t(3,n)$ 和 $\bar{t}(3,n)$ 的闭公式以及 $t(m,n)$ 递推式阶的估计 .

关键词　格图, 生成树, 递推式, 计数

分类号　O 157. 5

对给定的正整数 $m, n, m\times n$ 格图 $G(m,n)$ 是平面上以 (x,y) $(x=1,2,\cdots,m;\ y=1,2,\cdots,n)$ 为顶点的图 . 顶点 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 相邻接, 当且仅当 $x_1=x_2$, $|y_1-y_2|=1$ 或 $|x_1-x_2|=1$, $y_1=y_2$. 用 $t(m,n)$ 表示 $G(m,n)$ 的生成树的数目, 用 $\bar{t}(m,n)$ 表示其中关于 $x=\dfrac{m+1}{2}$ 成轴对称的生成树的数目 . Sedláček 首先求出 $t(2,n)$ 的闭公式 [1], Boesch 给出了一个简化的证明 [2]. 本文将给出 $t(3,n)$ 和 $\bar{t}(3,n)$ 的递推式、生成函数及闭公式 . 对于 $t(m,n)$, 给出递推式阶的上下界的估计 .

1　关于 $t(3,n)$

对 $G(3,n)$ 的生成树, 考察与第一行顶点 $(y=n)$ 关联的边, 共有 14 种可能的情况, 分为四类, 如图 1 所示 .

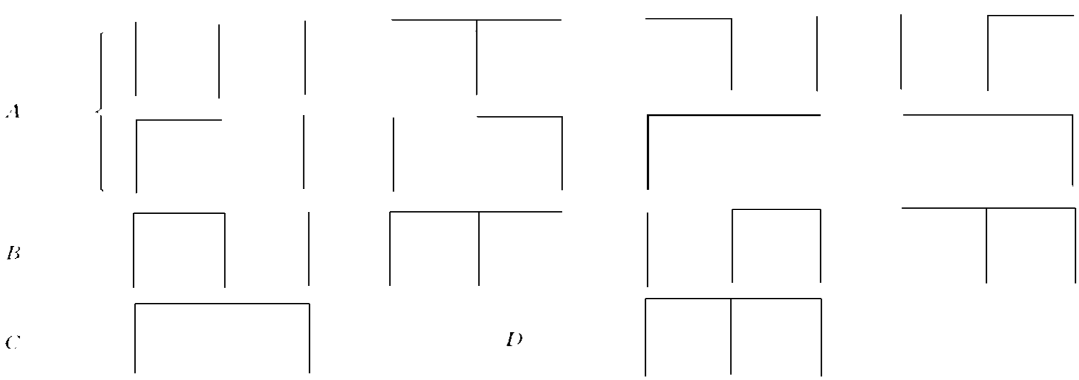

图 1　$G(3,n)$ 生成树的分类

* 本文 1997-07-07 收到

若删去生成树第一行的顶点及其关联的边, A 类树的子图只有一个分支; B 类树的子图有两个分支, 顶点$(n-1,1)$ 和$(n-1,3)$ 属于不同分支; C 类树的子图也有两个分支, 顶点$(n-1,1)$ 和$(n-1,3)$ 属于同一分支; D 类树的子图有三个分支, 顶点$(n-1,1)$, $(n-1,2)$和$(n-1,3)$分别属于三个不同的分支. 用 $t_i(3,n-1)$, $i=1,2,3$ 分别表示 B, C, D 类树的数目, 则

$$t(3,n)=8t(3,n-1)+4t_1(3,n-1)+t_2(3,n-1)+t_3(3,n-1). \tag{1}$$

对 B 类树, 考察与其第二行顶点$(y=n-1)$ 关联的边的各种可能情况, 同样可以分成四类, 选其中一种为代表如图 2 所示, 则

$$t_1(3,n-1)=5t(3,n-2)+3t_1(3,n-2)+t_2(3,n-2)+t_3(3,n-2). \tag{2}$$

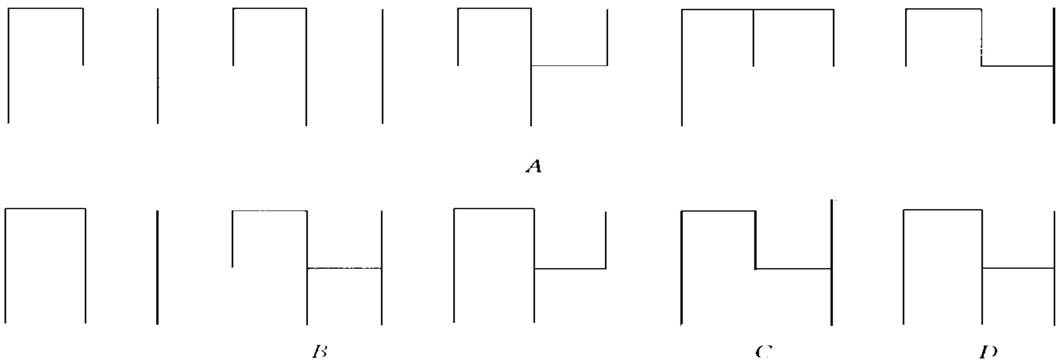

图 2　B 类树的分类

由同样的方法可得

$$t_2(3,n-1)=8t(3,n-2)+4t_1(3,n-2)+3t_2(3,n-2)+2t_3(3,n-2), \tag{3}$$

$$t_3(3,n-1)=3t(3,n-2)+2t_1(3,n-2)+t_2(3,n-2)+t_3(3,n-2). \tag{4}$$

由式(1)～(4)解得

$$\begin{aligned}t(3,n)=&15t(3,n-1)-25t(3,n-2)-42t(3,n-3)-210t(3,n-4)\\&-122t_1(3,n-4)-55t_2(3,n-4)-48t_3(3,n-4),\end{aligned} \tag{5}$$

$$t_1(3,n-4)=\frac{1}{16}t(3,n-1)-t(3,n-2)+3t(3,n-3)-\frac{47}{16}t(3,n-4), \tag{6}$$

$$t_2(3,n-4)=\frac{5}{8}t(3,n-1)-9t(3,n-2)+15t(3,n-3)-\frac{35}{8}t(3,n-4), \tag{7}$$

$$\begin{aligned}t_3(3,n-4)=&-\frac{7}{8}t(3,n-1)+13t(3,n-2)\\&-26t(3,n-3)+\frac{65}{8}t(3,n-4).\end{aligned} \tag{8}$$

将式(6)～(8)代入(5)得

定理 1　$t(3,n)$的递推式为

$$\begin{aligned}t(3,n)=&15t(3,n-1)-32t(3,n-2)+15t(3,n-3)\\&-t(3,n-4)\qquad(n=4,5,6,\cdots).\end{aligned} \tag{9}$$

令 $t(3,n)$的生成函数为

$$A(x)=\sum_{i=0}^{\infty}t(3,i)x^i,$$

初始值 $t(3,0)=0, t(3,1)=1, t(3,2)=15, t(3,3)=192.$

$$A(x)-15xA(x)+32x^2A(x)-15x^3A(x)+x^4A(x)=x-x^3,$$

由此可得

定理 2　$t(3,n)$ 的生成函数为

$$A(x)=\frac{x-x^3}{1-15x+32x^2-15x^3+x^4}, \tag{10}$$

解特征方程

$$x^4-15x^3+32x^2-15x+1=0,$$

得 4 个根为

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=\frac{1}{4}(3+\sqrt{5})(5+\sqrt{21}),\\ \alpha_2&=\frac{1}{4}(3+\sqrt{5})(5-\sqrt{21}),\\ \alpha_3&=\frac{1}{4}(3-\sqrt{5})(5+\sqrt{21}),\\ \alpha_4&=\frac{1}{4}(3-\sqrt{5})(5-\sqrt{21}).\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

结合初始值求得

定理 3　$t(3,n)$ 的闭公式为

$$t(3,n)=\frac{1}{\sqrt{105}}(\alpha_1^n-\alpha_2^n-\alpha_3^n+\alpha_4^n), \tag{12}$$

其中 α_i 如式(11)所示, $i=1,2,3,4.$

2　关于 $\bar{t}(3,n)$

对 $G(3,n)$ 中关于 $x=2$ 成轴对称的生成树, 考察与第一行顶点关联的边, 共有 3 种可能的情况, 分为两类如图 3 所示.

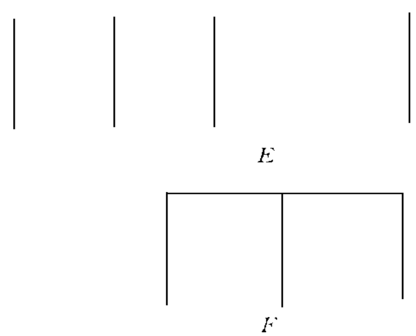

图 3　$G(3,n)$ 对称生成树的分类

用 $\bar{t}(3,n-1)$ 表示 F 类对称树的数目, 则

$$\bar{t}(3,n)=2\bar{t}(3,n-1)+\bar{t}_1(3,n-1), \tag{13}$$

$$\bar{t}_1(3,n-1)=\bar{t}(3,n-2)+\bar{t}_1(3,n-2). \tag{14}$$

由式(13), (14)解得

定理 4　$\bar{t}((3,n)$ 的递推式为

$$\bar{t}(3,n)=3\bar{t}(3,n-1)-\bar{t}(3,n-2)\quad(n=2,3,4,\cdots). \tag{15}$$

结合初始值 $\bar{t}(3,0)=0, \bar{t}(3,1)=1$, 用定理 2, 定理 3 的方法可得

定理 5　$\bar{t}(3,n)$ 的生成函数为

$$A(x)=\frac{1}{1-3x+x^2}, \tag{16}$$

定理 6　$\bar{t}(3,n)$ 的闭公式为

$$\bar{t}(3,n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \tag{17}$$

注意到 $\bar{t}(3,n)$ 恰好是 Fibonacci 数 F_{2n}.

3　关于 $t(m,n)$

前面的方法可以对任意的 m 求得 $t(m,n)$ 的递推式 . 只是随着 m 的增大, 计算量将迅速地增大 .

对 $G(m,n)$ 的生成树, 与第一行顶点关联的边至多有 $2n-1$ 条, 至少有 n 条 . 考虑各种可能的情况, 将它们分类, 由于

$$C_{2n-1}^{n} + C_{2n-1}^{n+1} + \cdots + C_{2n-1}^{2n-1} = 2^{2n-2},$$

故 $G(m,n)$ 的生成树至多可以分为 2^{2n-2} 类. 另一方面, 若删去第一行顶点及关联的边, 生成树的子图可能有 k 个分支, $k=1,2,\cdots,n$. 因此 $G(m,n)$ 的生成树至少可以分为 n 类 .

用 $\Delta(m,n)$ 表示 $t(m,n)$ 的递推式的阶, 可得

定理 7　$n \le \Delta(m,n) \le 2^{2n-2}$.

参　考　文　献

1　Sedláček J. On the number of spanning trees of finite graphs. Casopis Pěst Mat., 1969, (94): 217～221
2　李晓明, 黄振杰 . 图中树的数目 . 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1993. 85～86

Numeration for Spanning Trees of Latticed Graph on a Plane

Huang Liying
(Dept. of Math., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract　Let $t(m,n)$ and $\bar{t}(m,n)$ be the number of spanning trees and the number of symmetric spanning trees, which are subgraphs of $m\times n$ latticed graph on a plane respectively. The closed formula of $t(3,n)$ and the recurrent formula $\bar{t}(3,n)$ are given, and the estimate for the order of $t(m,n)$ is given as well.

Keywords　latticed graph, spanning tree, recurrent formula, numeration