第19卷　第1期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol.19　No.1
1998年1月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jan.1998

用Hyperbolic函数构造高阶Schrödinger方程的辛格式*

曾　文　平

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

摘要　利用Hyperbolic函数Sinh(x)和tanh(x)构造了高阶Schrödinger方程的任意阶精度的辛格式并讨论了它们的稳定性.

关键词　高阶薛丁锷方程, 双曲函数, 辛格式

分类号　O 241.84

1984年冯康[1,2]用辛几何的观点提出计算Hamiltonian系统的新方法,系统地研究了用生成函数构造任意阶精度的辛格式的一般方法. 随后,秦孟兆[3,4]等对波动方程的辛格式进行深入的研究. 我们在文[5]中构造了高阶Schrödinger方程的哈蜜顿型蛙跳格式,并讨论其稳定性;文[6]则利用Hyperbolic函数sinh(x)和tanh(x)构造Schrödinger方程的任意阶精度的辛格式,并讨论了所构造的格式的稳定性. 本文将进一步推广文[5,6]的结果到高阶Schrödinger方程,利用Hyperbolic函数sinh(x)和tanh(x)构造高阶Schrödinger方程的任意阶精度的辛格式,进而讨论所构造的格式的稳定性.

1　高阶Schrödinger方程的Hamiltonian形式

考虑如下高阶Schrödinger方程 $i\frac{\partial u}{\partial t}+(-1)^m\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}}=0$,即

$$\frac{\partial u}{\partial t}=i(-1)^m\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}} \tag{1}$$

的周期初值问题. 其中$u=v+iw$, $v=\mathrm{Re}u$, $w=\mathrm{Im}u$, $i=\sqrt{-1}$. 由于边介条件为周期的,因而解具有周期性.

由文[5]引理5知,方程(1)具有模平方守恒与能量守恒性质. 因而方程(1)具有Hamiltonian形式

$$\frac{dz}{dt}=J^{-1}H_z, \tag{2}$$

其中Hamiltonian函数为

* 本文1997-05-26收到;福建省自然科学基金资助项目

$$H = \frac{1}{2}\int\left\{\left(\frac{\partial^m v}{\partial x^m}\right)^2 + \left(\frac{\partial^m w}{\partial x^m}\right)^2\right\}\mathrm{d}x,$$

$$Z = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}, \quad J^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{m+1} \\ (-1)^m & 0 \end{bmatrix}, \quad H_z = \begin{bmatrix} \delta H/\delta v \\ \delta H/\delta w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^{2m} v}{\partial x^{2m}} \\ \dfrac{\partial^{2m} w}{\partial x^{2m}} \end{bmatrix}.$$

方程(2) 可改写为

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} = J^{-1}AZ, \tag{3}$$

其中

$$J^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{m+1}\Delta \\ (-1)^m\Delta & 0 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix},$$

Δ 为逼近$\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}$的中心差商算子.

令 $\Delta_2^{(m)}$ 为逼近$\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}$的二阶精度差商算子, 即

$$\Delta_2^{(m)} v_j = \frac{\delta_x^{2m} v_j}{(\Delta x)^{2m}} = \frac{\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_{2m}^k(v_{j+(m-k)} + v_{j-(m-k)}) + C_{2m}^m v_j}{(\Delta x)^{2m}},$$

其中 δ_x^{2m} 表示 $2m$ 阶中心差分算子.

令 $\Delta_4^{(m)}$ 为逼近$\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}$的四阶精度差商算子, 即

$$\Delta_4^{(m)} v_j = \frac{\delta_x^{2m} v_j}{(\Delta x)^{2m}} + \beta_m \frac{\delta_x^{2(m+1)} v_j}{(\Delta x)^{2m}},$$

其中 $\beta_m = \frac{2\{m^{2(m+1)} - C_{2m}^1(m-1)^{2(m+1)} + C_{2m}^2(m-2)^{2(m+1)} + \cdots + (-1)^{m-1}C_{2m}^{m-1}\}}{(2(m+1))!}$. 关于 $\Delta_2^{(m)} v_j$ 及 $\Delta_4^{(m)} v_j$ 的系数可见文 [5] 表 1 和表 2.

记 $v = [v_1, v_2, \cdots, v_N]^{\mathrm{T}}$, $w = [w_1, w_2, \cdots, w_N]^{\mathrm{T}}$, 则方程(3) 可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{m+1}M_l^{(m)} \\ (-1)^m M_l^{(m)} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{m+1}M_l^{(m)} w \\ (-1)^m M_l^{(m)} v \end{bmatrix} \quad (l = 1, 2), \tag{4}$$

其中 $M_1^{(m)}, M_2^{(m)}$ 分别是对应于 $\Delta_2^{(m)}$ 及 $\Delta_4^{(m)}$ 的 $N \times N$ 矩阵, 具体形式见文 [5] 表 3 和表 4.

方程组(4) 逼近于方程(3) 在空间方向的离散精度是 $O((\Delta x)^{2l})$.

2　Hyperbolic 函数 tanh(x) 的辛格式

现在考虑线性 Hamiltonian 方程组

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = J^{-1}A^{(m)}(2l)z, \tag{5}$$

由 $\tanh(x)$ 所生成的辛格式. 其中 $A^{(m)}(2l)$ 为对应于 $\Delta_{2l}^{(m)}$ 的对称矩阵且逼近于 A 具有 $2l$ 阶精度.

在时间 t 及 $t + \Delta t$ 处方程(5) 具有精确解

$$z(t + \Delta t) = \mathrm{e}^{\Delta t J^{-1}A^{(m)}(2l)} z(t).$$

因 $z(t+\Delta t)-z(t)=(e^{\Delta t J^{-1}A^{(m)}(2l)}-1)z(t)$, $z(t+\Delta t)+z(t)=(e^{\Delta t J^{-1}A^{(m)}(2l)}+1)z(t)$, 从而有

$$\begin{aligned} z(t+\Delta t)-z(t) &= \frac{e^{\Delta t J^{-1}A^{(m)}(2l)}-1}{e^{\Delta t J^{-1}A^{(m)}(2l)}+1}(z(t+\Delta t)+z(t)) \\ &= \tanh\left(\frac{\Delta t}{2}J^{-1}A^{(m)}(2l)\right)(z(t+\Delta t)+z(t)), \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $\tanh(x)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k-1}x^{2k-1}$. $a_{2k-1}=2^{2k}(2^{2k}-1)\frac{B_{2k}}{(2k)!}$, B_{2k} 为 Bernoulli 数, 它由下式所定义 $\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$.

格式(6) 在时间方向有任意阶精度. 然而若取 $\tanh(x)$ 的 $2s$ 阶截断误差表达式

$$\tanh\left(2s,\frac{\Delta t}{2}J^{-1}A^{(m)}(2l)\right)=\sum_{k=1}^{s}a_{2k-1}\left(\frac{\Delta t}{2}J^{-1}A^{(m)}(2l)\right)^{2k-1},$$

则可得精度为 $O(\Delta t^{2s}+\Delta x^{2l})$ 的差分格式为

$$Z_{n+1}-Z_n=\tanh\left(2s,\frac{\Delta t}{2}J^{-1}A^{(m)}(2l)\right)(Z_{n+1}+Z_n). \tag{7}$$

引理 1[2]　如果 $f(x)$ 是奇次多项式且 L 是无穷小辛矩阵, 即 $L^TJ+JL=0$, 则 $f(L)$ 也是无穷小辛矩阵.

引理 2[2]　如果 Φ 是无穷小辛矩阵, $I+\Phi\neq 0$, 则 $F=(I+\Phi)^{-1}(I-\Phi)$ 也是一个辛矩阵.

因为 $L=J^{-1}A^{(m)}(2l)=\begin{bmatrix}0 & (-1)^{m+1}M_l^{(m)}\\ (-1)^mM_l^{(m)} & 0\end{bmatrix}$ 满足

$$\begin{aligned} L^TJ+JL &= \begin{bmatrix}0 & (-1)^mM_l^{(m)}\\ (-1)^{m+1}M_l^{(m)} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & (-1)^m\\ (-1)^{m+1} & 0\end{bmatrix} \\ &+\begin{bmatrix}0 & (-1)^m\\ (-1)^{m+1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & (-1)^{m+1}M_l^{(m)}\\ (-1)^mM_l^{(m)} & 0\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}-M_l^{(m)} & 0\\ 0 & -M_l^{(m)}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}M_l^{(m)} & 0\\ 0 & M_l^{(m)}\end{bmatrix}=0, \end{aligned}$$

所以 $L=J^{-1}A^{(m)}(2l)$ 是无穷小辛矩阵. 由引理 1 知 $\Phi=\tanh(2s,(\Delta t/2)J^{-1}A^{(m)}(2l))$ 也是无穷小辛矩阵. 从而由引理 2 知, 格式(7) 是辛格式. 于是有

定理 1　格式(7) 是辛的, 且在时间方向具有 $2s$ 阶, 在空间方向具有 $2l$ 阶精度.

下面给出阶为 $0(\Delta t^2+\Delta x^{2l})$ 和 $0(\Delta t^4+\Delta x^{2l})$ 的两个格式:

$$Z_{n+1}-Z_n=\frac{\Delta t}{2}J^{-1}A^{(m)}(2l)(Z_{n+1}+Z_n), \tag{8}$$

$$Z_{n+1}-Z_n=\left(\frac{\Delta t}{2}J^{-1}A^{(m)}(2l)-\frac{(\Delta t)^3}{24}(J^{-1}A^{(m)}(2l))^3\right)(Z_{n+1}+Z_n). \tag{9}$$

注意到格式(8) 恰好是中心 Euler 格式.

引理 3[3]　如果 $J^{-1}A^{(m)}(2l)$ 的全部特征值为纯虚数, 则格式(7) 是稳定的.

现在用 $\Delta_{2l}^{(m)}(l=1,2)$ 逼近 $\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}$, 根据 Fourier 分析可知, $\Delta_{2l}^{(m)}$ (即矩阵 $M_l^{(m)}$) $(l=1,2)$ 的特征值 $\lambda_k^{(m)}(2l)$ 如文[5]表 3～4 所列全为实数, 因而矩阵

$$J^{-1}A^{(m)}(2l)=\begin{bmatrix}0 & (-1)^{m+1}M_l^{(m)}\\ (-1)^mM_l^{(m)} & 0\end{bmatrix}$$

的特征值 $\mu_{k,l}^{(m)}(2l)=\pm \mathrm{i}\ \lambda_k^{(m)}(2l)$ 全为纯虚数. 于是, 由引理 3 可得

定理 2　格式(7)是稳定的.

下面给出 Hamiltonian 方程组(3)的某些 $\tanh(x)$ 辛格式.

(1) 精度为 $0(\Delta t^2+\Delta x^2)$ 的 $\tanh(x)$ 辛格式

$$\begin{bmatrix} U^{k+1} \\ \omega^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^{k} \\ \omega^{k} \end{bmatrix} + \frac{\Delta t}{2}\begin{bmatrix} 0 & (-1)^{m+1}M_1^{(m)} \\ (-1)^m M_1^{(m)} & 0 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} U^{k+1} \\ \omega^{k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U^{k} \\ \omega^{k} \end{bmatrix}\right) \tag{10}$$

(2) 精度为 $0(\Delta t^2+\Delta x^4)$ 的 $\tanh(x)$ 辛格式

$$\begin{bmatrix} U^{k+1} \\ \omega^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^{k} \\ \omega^{k} \end{bmatrix} + \frac{\Delta t}{2}\begin{bmatrix} 0 & (-1)^{m+1}M_2^{(m)} \\ (-1)^m M_2^{(m)} & 0 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} U^{k+1} \\ \omega^{k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U^{k} \\ \omega^{k} \end{bmatrix}\right); \tag{11}$$

(3) 精度为 $0(\Delta t^4+\Delta x^4)$ 的 $\tanh(x)$ 辛格式

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} U^{k+1} \\ \omega^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^{k} \\ \omega^{k} \end{bmatrix} + \Bigg\{ &\frac{\Delta t}{2}\begin{bmatrix} 0 & (-1)^{m+1}M_2^{(m)} \\ (-1)^m M_2^{(m)} & 0 \end{bmatrix} \\ &- \frac{(\Delta t)^3}{24}\begin{bmatrix} 0 & (-1)^{m+1}M_2^{(m)} \\ (-1)^m M_2^{(m)} & 0 \end{bmatrix}^3\Bigg\}\left(\begin{bmatrix} U^{k+1} \\ \omega^{k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U^{k} \\ \omega^{k} \end{bmatrix}\right)\end{aligned} \tag{12}$$

格式(7), (10)～(12)都是稳定的, 然而它们都是两层隐式格式, 需解线性方程组, 工作量较大.

3　Hyperbolic 函数 sinh(x)的辛格式

本节考虑由 $\sinh(x)$ 生成的三层显格式、利用方程(5)的精确解有

$$\begin{aligned} z(t+\Delta t) - z(t-\Delta t) &= \mathrm{e}^{\Delta t J^{-1}A^{(m)}(2l)}z(t) - \mathrm{e}^{-\Delta t J^{-1}A^{(m)}(2l)}z(t) \\ &= 2\sinh(x)(\Delta t J^{-1}A^{(m)}(2l))z(t), \end{aligned} \tag{13}$$

其中

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

格式(13)在时间方向具有任意阶精度, 然而若取 $\sinh(x)$ 的 $2s$ 阶截断误差表达式 $\sinh(2s, \Delta t J^{-1}A^{(m)}(2l)) = \sum_{k=1}^{s}(\Delta t J^{-1}A^{(m)}(2l))^{2k-1}/(2k-1)!$, 则可得精度为 $0(\Delta t^{2s}+\Delta x^{2l})$ 的差分格式为

$$Z_{n+1} - Z_{n-1} = 2\sinh(2s, \Delta t J^{-1}A^{(m)}(2l))Z_n. \tag{14}$$

为了证明格式(13)是辛格式, 我们研究三步格式

$$z^{n+1} = \Phi_1 z^n + z^{n-1} \tag{15}$$

的辛条件. 引进新变量 $\zeta = z^{n-1}$ 化(15)式为二步格式

$$\begin{bmatrix} z^{n+1} \\ \zeta^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z^{n} \\ \zeta^{n} \end{bmatrix}. \tag{16}$$

从而有

引理 4[6]　三步格式(15)是辛的, 其充要条件为

$$\Phi_1 + \Phi_1^{\mathrm{T}} = 0 \tag{17}$$

即要求 Φ_1 是反对称矩阵.

与(16)式等价的方程(5)的 Hamiltonian 方程组为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} z \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & J^{-1} \\ J^{-1} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & A^{(m)}(2l) \\ -A^{(m)}(2l) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z \\ \zeta \end{bmatrix}. \tag{18}$$

由引理1知, $\sinh(2s, \Delta t J^{-1}A^{(m)}(2l))$ 是无穷小辛矩阵. 于是有

定理3 格式(14)是精度为 $0(\Delta t^{2s}+\Delta x^{2l})$ 的辛格式.

当 $s=1$ 时, 格式(14)恰好是蛙跳格式. 今后我们从方便起见, 记 $2m$ 阶方程(1)的精度为 $O(\Delta t^{2s}+\Delta x^{2l})$ 的辛格式(14)为 $H_m\mathrm{SLFM}(2s, 2l)$. 下面给出若干由 $\sinh(x)$ 所生成的辛格式:

(1) $H_m\mathrm{SLFM}(6)$, 其精度为 $0(\Delta t^2+\Delta x^2)$

$$\begin{bmatrix} \upsilon^{k+1} \\ \omega^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \upsilon^{k-1} \\ \omega^{k-1} \end{bmatrix} + 2\Delta t\begin{bmatrix} 0 & (-1)^{m+1}M_1^{(m)} \\ (-1)^m M_1^{(m)} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \upsilon^{k} \\ \omega^{k} \end{bmatrix};$$

(2) $H_m\mathrm{SLFM}(2,4)$, 其精度为 $0(\Delta t^2+\Delta x^4)$

$$\begin{bmatrix} \upsilon^{k+1} \\ \omega^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \upsilon^{k-1} \\ \omega^{k-1} \end{bmatrix} + 2\Delta t\begin{bmatrix} 0 & (-1)^{m+1}M_2^{(m)} \\ (-1)^m M_2^{(m)} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \upsilon^{k} \\ \omega^{k} \end{bmatrix};$$

(3) $H_m\mathrm{SLFM}(4,2)$, 其精度为 $0(\Delta t^4+\Delta x^2)$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \upsilon^{k+1} \\ \omega^{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \upsilon^{k-1} \\ \omega^{k-1} \end{bmatrix} + 2\Delta t\begin{bmatrix} 0 & (-1)^{m+1}M_1^{(m)} \\ (-1)^m M_1^{(m)} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \upsilon^{k} \\ \omega^{k} \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{(\Delta t)^3}{3}\begin{bmatrix} 0 & (-1)^{m+1}M_1^{(m)} \\ (-1)^m M_1^{(m)} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \upsilon^{k} \\ \omega^{k} \end{bmatrix};\end{aligned}$$

(4) $H_m\mathrm{SLFM}(4,4)$, 其精度为 $0(\Delta t^4+\Delta x^4)$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \upsilon^{k+1} \\ \omega^{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \upsilon^{k-1} \\ \omega^{k-1} \end{bmatrix} + 2\Delta t\begin{bmatrix} 0 & (-1)^{m+1}M_2^{(m)} \\ (-1)^m M_2^{(m)} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \upsilon^{k} \\ \omega^{k} \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{(\Delta t)^3}{3}\begin{bmatrix} 0 & (-1)^{m+1}M_2^{(m)} \\ (-1)^m M_2^{(m)} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \upsilon^{k} \\ \omega^{k} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

定理4 当 $s\to\infty$ 时, 格式(14)的稳定域将复盖整个实轴.

证 因 $J^{-1}A^{(m)}(2l)$ 的特征值 $\mu_k^{(m)}(2l) = \pm i\ \lambda_k^{(m)}(2l)$ 全为纯虚数、于是由[2, Th7]立得本定理.

因为格式(14)的过渡矩阵的特征方程为

$$f(\eta) = \eta^2 - 2i\sin(2s, \mu^{(m)}(2l))\eta - 1 = 0. \tag{19}$$

其中 $\sin(2s, \mu^{(m)}(2l)) = \mu^{(m)}(2l) - \frac{(\mu^{(m)}(2l))^3}{3!} + \cdots + (-1)^s\frac{(\mu^{(m)}(2l))^{2s-1}}{(2s-1)!}$, 且 $\mu^{(m)}(2l)$ 是 $\Delta t\times J^{-1}A^{(m)}(2l)$ 的特征值 $\mu_k^{(m)}(2l) = \pm i\ \lambda_k^{(m)}(2l)$. 由文[7] Miller 准则知, 格式(14)稳定的充要条件为 $\sin(2s, \mu^{(m)}(2l)) < 1$.

令 $\eta_{2s} = \min_i \mu_i$, 其中 μ_i 是 $\sin(2s, \mu) = \pm 1$ 的正根, 且令 $\tau^{(m)} = \max_k(\Delta x^2\ \lambda_k^{(m)}(2l))$. 于是有

定理5 格式(14)(即 $H_m\mathrm{SLFM}(2s, 2l)$)的稳定性条件为

$$\gamma^{(m)} = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^{2m}} \le \frac{\eta_{2s}}{\tau^{(m)}} = \frac{\eta_{2s}}{l_{1,l}}\ \frac{1}{4^{m-1}}, \tag{20}$$

其中 η_{2s}, $l_{1,l}$ 取值如文[5]中附表所示, 由此按公式(20)可得一些常用格式的稳定性条件比较表如附表所示.

附表　差分格式稳定性条件比较表

格式名称	稳定性条件	格式名称	稳定性条件
H_mSLFM(2,2)	$\gamma^{(m)①}\le\frac{1}{4^m}$	H_mSLFM(2,4)	$\gamma^{(m)①}\le\frac{1}{4^m}\times\frac{3}{m+3}$
H_mSLFM(4,2)	$\gamma^{(m)}\le\frac{1}{4^m}\times 2.8473215$	H_mSLFM(4,4)	$\gamma^{(m)}\le\frac{1}{4^m}\times\frac{3}{m+3}\times 2.8473215$
H_mSLFM(6,2)	$\gamma^{(m)}\le\frac{1}{4^m}\times 1.4913487$	H_mSLFM(6,4)	$\gamma^{(m)}\le\frac{1}{4^m}\times\frac{3}{m+3}\times 1.4913487$
H_mSLFM(8,2)	$\gamma^{(m)}\le\frac{1}{4^m}\times 3.7926559$	H_mSLFM(8,4)	$\gamma^{(m)}\le\frac{1}{4^m}\times\frac{3}{m+3}\times 3.7926559$

① $\gamma^{(m)}=\Delta t/(\Delta x)^{2m}$

由附表可见: $\sinh(x)$ 辛格式在空间方向提高精度会缩小稳定域, 而时间方向提高精度则稳定域会扩大.

最后必须指出, 文 [6] 的结论为本文当 $m=1$ 时的特例.

参　考　文　献

1 Feng K. On Difference schemes and sypmplectic geometry. In: Feng K. proceedings of the 1984 Bejimg Symposium On Differential Geometry and Differantial Equations. Computation of Partial Differential Equations. Beijing: Science Press, 1985. 42～58

2 Feng K, Qin M Z. The Symplectic Methods for the Domputation of Hamiltonian Equation. In: Thu Y L, eds. Proc. of 1st Chinese Cong. on Numerical Method of PDE's, March 1986, Shanghai, Lecture Notes in Math. No. 1279, Berlin: Springls, 1987. 1～37

3 Qin M Z, Zhu W J. Construction of Sympleetic Schemes for Wave Equations via Hyperbolie Functions Sinh(x), cosh(x). and tanh(x). Computers Math. Applic, 1993, 26(8): 1～11

4 秦孟兆. 任意阶精度蛙跳格式稳定性分析, 计算数学, 1992, 14(1), 1～9

5 曾文平. 高阶 Schrödinger 方程的哈密顿型蛙跳格式, 高等学校计算数学学报, 1995, 17(4), 305～317

6 曾文平. 用 Hyperbolic 函数构造 Schrödinger 方程的辛格式, 应用数学学报, 1996, 19(3), 424～430

7 Miller J H. On the Location of zeros of certain class of polynomials with Application to Namerical Analysis. J. Inst. Math. Appl., 1971, 8: 397～409

Constructing Symplectic Schemes for Schrödinger Equation of Higher Order by Using Hyperbolic Function

Zeng Wenping

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract By using hyperbolic functions $\sinh(x)$ and $\tanh(x)$, the author constructs symplectic schemes with the precision of arbitrary order; and discusses their stability.

Keywords schrödinger equation of higher order, hyperbolic function, symplectic scheme