一类 Volterra 型积分微分方程的稳定性*

王　全　义

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

摘要　研究了一类 Volterra 型积分微分方程的零解的稳定性、一致稳定性和渐近稳定性, 得到了一些新结果. 这些结果具有简单形式, 易于验证和应用.

关键词　积分微分方程, 稳定性, 渐近稳定性

分类号　O 175. 6

文 [1,2] 研究了下列纯量 Volterra 型积分微分方程

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_0^t C(t,s)x(s)\,ds \tag{1}$$

的零解的稳定性问题, 这里 $x \in R$, $A(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, $C(t,s)$ 是 $0 \le s \le t < +\infty$ 上的连续函数, 且 $\int_t^{\infty} |C(u,s)|\,du$ 对 $0 \le s \le t < +\infty$ 连续. 本文也研究方程(1)的零解的稳定性问题, 得到了一些新结果. 这些结果具有简单形式, 便于验证和应用, 并推广了文 [1] 的有关结果.

1　零解的稳定性

定理 1　如果 $A(t) \le 0$ 且存在着常数 $k_1 \ge 1$ 及 $k_2 \ge 0$ 使得

$$A(t) + K_1 \int_t^{\infty} |C(u,t)|\,du \le -K_2, \tag{2}$$

则方程(1)的零解是稳定的.

证　取李雅普诺夫泛函

$$V(t,x(\cdot)) = |x| + K_1 \int_0^t \int_t^{\infty} |C(u,s)|\,du\,|x(s)|\,ds. \tag{3}$$

计算 $V(t,x(\cdot))$ 沿着方程(1)的解的右上导数得

$$\begin{aligned} D^+V_{(1)}(t,x(\cdot)) &= \dot{x}\,\mathrm{sgn}\,x(t+0) + K_1|x|\int_t^{\infty}|C(u,t)|\,du \\ &\quad - K_1\int_0^t |C(t,s)|\,|x(s)|\,ds \\ &= \mathrm{sgn}\,x(t+0)\left[A(t)x(t) + \int_0^t C(t,s)x(s)\,ds\right] \\ &\quad + K_1|x|\int_t^{\infty}|C(u,t)|\,du - K_1\int_0^t |C(t,s)|\,|x(s)|\,ds \end{aligned}$$

* 本文 1997-05-22 收到; 国务院侨办重点科研基金资助项目

$$\leq [A(t) - K_1\int^{\infty} C(u,t) \, du] \quad x$$

$$\leq - K_2 \, x \quad \leq 0.$$

因为 $V(t,x(\cdot))$ 正定且 $DV^{+}_{(1)}(t,x(\cdot)) \leq 0$，所以方程(1)的零解是稳定的.

2　零解的一致稳定性

定理 2　假设定理 1 的条件成立且 $\int\int^{\infty} C(u,s) \, du ds$ 有界，则方程(1)的零解是一致稳定的.

证　要证对任给 $\epsilon > 0$ 及 $t_0 \geq 0$，存在着 $\delta > 0$(与 t_0 无关)，使得当 $\varphi(t) < \delta, t \in [0, t_0]$，有

$$x(t, t_0, \varphi) < \epsilon, \ (t \geq t_0). \tag{4}$$

事实上，从定理 1 的证明知 $DV^{+}_{(1)}(t,x(\cdot)) \leq 0$，所以对一切 $t \geq t_0$ 有

$$\begin{aligned} x(t, t_0, \varphi) &\leq V(t, x(\ )) \\ &\leq V(t_0, x(\ )) \\ &\leq \varphi(t_0) + K_1\int^{0}\int_{0}^{\infty} C(u,s) \, du \, \varphi(s) \, ds \\ &\leq \delta + K_1\delta\int^{0}\int_{0}^{\infty} C(u,s) \, du ds, \ (t \geq t_0). \end{aligned} \tag{5}$$

因为 $\int^{0}\int_{0}^{\infty} C(u,s) \, du ds$ 有界. 故有常数 $M > 0$ 使得 $0 \leq \int^{0}\int_{0}^{\infty} C(u,s) \, du ds < M$. 现在取 $\delta = \frac{\epsilon}{2(1+K_1M)} > 0$(与 t_0 无关)，于是由式(5)得

$$\begin{aligned} x(t, t_0, \varphi) &\leq \delta + K_1\delta M \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, \quad (t \geq t_0). \end{aligned} \tag{6}$$

即方程(1)的零解是一致稳定的.

定理 3　如果存在着常数 $K_3 > 1$ 使得

$$A(t) + K_3\int C(t,s) \, ds \leq 0, \tag{7}$$

则方程(1)的零解是一致稳定的.

证　对任意的 $t_0 \geq 0$，方程(1)满足初始条件 $x(t) = \varphi(t)$ $(t \in [0, t_0], \varphi(t)$ 在 $[0, t_0]$ 上连续)的解可表示为

$$x(t, t_0, \varphi) = \exp(\int_0 A(s) ds) \varphi(t_0) + \int_0 \exp(\int A(\tau) d\tau)$$

$$\times \int C(s,\tau) x(s) d\tau ds, \quad (t \geq t_0). \tag{8}$$

于是对任意的 $\epsilon > 0$，取正数 $\delta = \frac{\epsilon(K_3 - 1)}{2K_3}$ (与 t_0 无关)，使得当 $\varphi(s) < \delta (s \in [0, t_0])$ 时就有

$$x(t, t_0, \varphi) < \epsilon, \quad (t \geq t_0). \tag{9}$$

否则的话，必有 $t_1 > t_0$ 使得

$$x(t, t_0, \varphi) < \epsilon, \quad (t_0 \leq t < t_1) \tag{10}$$

及

$$x(t_1, t_0, \varphi) = \epsilon. \tag{11}$$

从而有

$$x(t, t_0, \varphi) \le \epsilon, \quad (0 \le t \le t_1). \tag{12}$$

而由式(8)及定理的条件得

$$\begin{aligned}
\epsilon = &\ x(t_1, t_0, \varphi) \\
&\le \exp\left(\int_0^{t_1} A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \varphi(t_0) + \int_0^{t_1} \exp\left(\int A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \\
&\quad \times \int C(s, \tau)\, x(\tau)\, \mathrm{d}\tau \mathrm{d}s \\
&\le \delta + \epsilon \int_0^{t_1} \exp\left(\int A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \int C(s, \tau)\, \mathrm{d}\tau \mathrm{d}s \\
&\le \delta + \epsilon \int_0^{t_1} \exp\left(\int A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \left(-\frac{A(s)}{K_3}\right) \mathrm{d}s \\
&\le \delta + \frac{\epsilon}{K_3} \\
&= \frac{\epsilon(K_3 - 1)}{2K_3} + \frac{\epsilon}{K_3} \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

这就发生了矛盾. 这个矛盾说明 $t \ge t_0$ 时, 式(9)成立, 即方程(1)的零解是一致稳定的.

3　零解的渐近稳定性

定理 4　如果 $A(t) \le 0$ 且存在常数 $K_1 > 1$ 及 $K_2 > 0$ 使得式(2)成立, 则方程(1)的零解是渐近稳定的.

证　由定理 1 可知方程(1)的零解是稳定的. 由式(1)得

$$x' \le A(t)\, x + \int C(t, s)\, x(s)\, \mathrm{d}s, \tag{14}$$

因此有

$$K A(t)\, x \le K \int C(t, s)\, x(s)\, \mathrm{d}s - K x', \tag{15}$$

其中 $K = \dfrac{K_1 - 1}{4} > 0$.

现在取李雅普诺夫泛函

$$V(t, x(\cdot)) = (1 + K)\, x + K_1 \int\int^{\infty} C(u, s)\, \mathrm{d}u\, x(s)\, \mathrm{d}s, \tag{16}$$

且由式(15, 16), 计算 $V(t, x(\cdot))$ 沿着方程(1)的解的右上导数得

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}V^{+}_{(1)}(t, x(\cdot)) = &\ (1 + K)\, \dot{x}\, \mathrm{sgn}\, x(t + 0) + K_1 \int^{\infty} C(u, t)\, x(t)\, \mathrm{d}u \\
&- K_1 \int C(t, s)\, x(s)\, \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le (1+K)\,\mathrm{sgn}\,x(t+0)\,[A(t)x+\int C(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s]\\
&\quad + K_1\int^{\infty}|C(u,t)|\,\mathrm{d}u\,|x| - K_1\int|C(t,s)|\,|x(s)|\,\mathrm{d}s\\
&\le (1+K)A(t)|x| + K_1\int^{\infty}|C(u,t)|\,\mathrm{d}u\,|x|\\
&\quad + (1+K)\int|C(t,s)|\,|x(s)|\,\mathrm{d}s - K_1\int|C(t,s)|\,|x(s)|\,\mathrm{d}s\\
&\le A(t)|x| + K\int|C(t,s)|\,|x(s)|\,\mathrm{d}s - K|x'|\\
&\quad + K_1\int^{\infty}|C(u,t)|\,\mathrm{d}u + (1+K)\int|C(t,s)|\,|x(s)|\,\mathrm{d}s\\
&\quad - K_1\int|C(t,s)|\,|x(s)|\,\mathrm{d}s\\
&\le [A(t)+K_1\int^{\infty}|C(u,t)|\,du]\,|x| - K|x'|\\
&\le -K_2|x| - K|x'|.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

因此我们有

$$
\begin{aligned}
(1+K)|x(t,t_0,\varphi)| &\le V(t,s(\cdot))\\
&\le V(t_0,\varphi(\cdot)) - K_2\int_0|x(s)|\,\mathrm{d}s - K\int_0|x'(s)|\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

因为$K_2>0$及$K>0$，所以由式(18)可知$x(t), x'(t)\in L^1(0,+\infty)$．由此可知当$t\to+\infty$时，$x(t)\to 0$．这样方程(1)的零解是渐近稳定的．

4 零解的不稳定性

定理5 如果$A(t)\ge 0$且存在着常数$K_1\ge 1$及$K_2>0$使得

$$
A(t) - K_1\int^{\infty}|C(u,t)|\,\mathrm{d}u \ge K_2,
\tag{19}
$$

则方程(1)的零解是不稳定的．

证 取李雅普诺夫泛函

$$
V(t,x(\cdot)) = |x| - K_1\int\int^{\infty}|C(u,s)|\,\mathrm{d}u\,|x(s)|\,\mathrm{d}s.
\tag{20}
$$

于是计算V沿着方程(1)的解的右上导数可得

$$
\begin{aligned}
DV^{+}_{(1)}(t,x(\cdot)) &= \dot{x}\,\mathrm{sgn}\,x(t+0) + K_1\int|C(t,s)|\,|x(s)|\,\mathrm{d}s\\
&\quad - K_1\int^{\infty}|C(u,t)|\,\mathrm{d}u\,|x|\\
&\ge A(t)|x| - \int|C(t,s)|\,|x(s)|\,\mathrm{d}s\\
&\quad + K_1\int|C(t,s)|\,|x(s)|\,\mathrm{d}s - K_1\int^{\infty}|C(u,t)|\,\mathrm{d}u\,|x|
\end{aligned}
$$

$$\geq K_2 \ x \ . \tag{21}$$

设 $x(t) = x(t, t_0, \varphi)$ 是方程(1) 的解, 则有

$$x(t) \ \geq V(t, x(\ )) \geq V(t_0, \varphi(\ )) + K_2 \int_0 x(s) \ \mathrm{d}s. \tag{22}$$

现在, 对于任给的 $t_0 \geq 0$, 我们可以选取一个连续的初始函数 φ: $[0, t_0] \to R$ 使得 $V(t_0, \varphi(\cdot)) > 0$. 由式(22) 得

$$x(t) \ \geq V(t, x(\ )) \geq V(t_0, \varphi(\ )) > 0. \tag{23}$$

故由式(22) 及(23) 得

$$\begin{aligned} x(t) \ &\geq V(t_0, \varphi(\ )) + K_2 \int_0 V(t_0, \varphi(\ ))\,\mathrm{d}s \\ &= V(t_0, \varphi(\ )) \ [1 + K_2(t - t_0)]. \end{aligned}$$

因此当 $t \to +\infty$ 时 $x(t) \ \to +\infty$. 即方程(1) 的零解是不稳定的 .

注　本文定理 1, 2, 4 及 5 都没有要求 $\int^{\infty} C(u, t) \ \mathrm{d}u$ 有界及 $A(t) < 0$ 和 $A(t)$ 的有界性, 故文〔1〕的定理 2. 1 是它们的特殊情况 . 此外, 本文定理 3 也没有对系数函数的有界性作出任何要求 . 因此, 本文的主要特点是将系数函数扩大到无界函数类 .

参　考　文　献

1　王慕秋, 王联, 杜雪堂 . 关于 Volterra 型积分微分方程的稳定性. 应用数学学报, 1992, 15(2): 184～193

2　Burton T A. Volterra integral and differential equations. New York: Academic Press, 1983. 37～135

Stability of a Class of Volterra Integrodifferential Equations

Wang Quanyi

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract　A study is made on the stability, the uniform stability and the asymptotic stability of the zero solution to a class of Volterra integrodifferential equations. The study leads to some new results which are simple in form and easy of verification and application.

Keywords　integrodifferential equation, stability , asymptotic stability