第18卷 第4期　华侨大学学报(自然科学版)　Vol.18 No.4
1997年10月　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　Oct.1997

# 两光子 JC 模型的无旋波逐级近似解*

杨小明①　　冯　芒②

(① 华侨大学国际经济系, 泉州 362011; ② 中国科学院武汉物理与数学所, 武汉 430071)

摘要　研究相干态表象中无旋转波近似的两光子 JC(Jaynes-Cummings) 模型被逐级求解, 求得系统的本征能量以及相应的限制性条件.

关键词　逐级近似, 无旋转波近似, Jaynes-Cummings 模型
分类号　O 411.1

JC 模型[1]是描述辐射场与物质相互作用的最简单实用的一个模型. 它着重处理辐射场与物质的近共振作用. 由于其中蕴含了极其丰富的物理内涵, 并能广泛地运用到许多领域中去, 所以一直备受人们青睐. 尤其近年来, 在空腔中成功地操纵单个 Rydberg 原子[2,3], 以及验证了 JC 模型的许多理论预言, 更使其名声大振.

目前研究 JC 模型及其相关的工作中, 较有影响的是 Tavis 等人[4]完成的多个二能级原子与辐射场的作用, 以及与多光子过程、Kerr 介质相关的非线性 JC 模型. 但是, 这些讨论都是在近共振假定下进行的, 其假定也被称作旋转波近似. 其实, 对于一个真实的物理体系, 失谐是更为普遍的情况. 因此, 在无旋转波近似的基础上求解 JC 模型是一个很有意义的工作.

不过, 已有许多工作表明, 无旋转波近似的 JC 模型极难精确求解, 因为此时的 JC 模型体系为一个非封闭体系, 或称不可积系统. 对于这种系统的求解一般须引入一些近似方法. 本文将在相干态表象下, 对无旋转波近似的非线性 JC 模型中最简单的问题——两光子 JC 模型作一个讨论. 我们将把一个纯粹的量子力学问题转化为求解一系列常微分方程, 因而使问题变得十分容易求解.

## 1　问题的求解

在无旋转波近似下, 两光子 JC 模型的哈氏量一般写为

$$H = \omega a^{+} a + \frac{\Delta}{2}\sigma_z + g(a^2 + a^{+2})(\sigma_+ + \sigma_-), \tag{1}$$

其中 $\omega$ 为辐射场频率, $\Delta$ 为原子的跃迁频率, $g$ 为耦合常数. $\sigma_+$, $\sigma_-$ 和 $\sigma_z$ 是泡利矩阵. 我们这里已假定 $\hbar = 1$.

根据相干态表象的性质[5], 可将 $a$ 用 $\frac{\partial}{\partial\alpha}$ 代替, $a^+$ 用 $\alpha$ 代替, 其中 $\alpha$ 为复数. 于是式(1)被改写为

* 本文1997-04-08收到

$$H = \omega\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} + \frac{\Delta}{2}\sigma_z + g\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2} + \alpha^2\right)(\sigma_+ + \sigma_-). \tag{2}$$

假定试探波函数为

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1(\alpha) \\ \psi_2(\alpha) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

其中

$$\psi_1(\alpha) = \exp\left(-\frac{1}{2}z\alpha^2\right)\sum_{n=0}^{\infty} b_n\alpha^{2n}, \tag{4}$$

$$\psi_2(\alpha) = \exp\left(-\frac{1}{2}z\alpha^2\right)\sum_{n=0}^{\infty} c_n\alpha^{2n}, \tag{5}$$

其中 $z$, $b_n$ 和 $c_n$ 是待定常数. 将(4), (5)以及(2)代入薛定谔方程, 可得

$$c_{n+1} = \frac{1}{g(2n+1)(2n+2)}\left[\left(E - 2n\omega - \frac{\Delta}{2}\right)b_n + \omega z b_{n-1} - g(z^2+1)c_{n-1} + gz(4n+1)C_n\right], \tag{6}$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{g(2n+1)(2n+2)}\left[\left(E - 2n\omega + \frac{\Delta}{2}\right)c_n + \omega z c_{n-1} - g(z^2+1)b_{n-1} + gz(4n+1)b_n\right]. \tag{7}$$

为了求解, 我们必须对式(4), (5)作截断. 先假定当 $n\geq 2$时, $b_n = c_n = 0$, 则有

$$c_1 = \frac{1}{2g}\left[\left(E - \frac{\Delta}{2}\right)b_0 + gzc_0\right], \tag{8}$$

$$b_1 = \frac{1}{2g}\left[\left(E + \frac{\Delta}{2}\right)c_0 + gzb_0\right], \tag{9}$$

$$c_2 = \frac{1}{12g}\left[\left(E - 2\omega - \frac{\Delta}{2}\right)b_1 + \omega z b_0 - g(z^2+1)c_0 + 5gzc_1\right], \tag{10}$$

$$b_2 = \frac{1}{12g}\left[\left(E - 2\omega + \frac{\Delta}{2}\right)c_1 + \omega z c_0 - g(z^2+1)b_0 + 5gzb_1\right], \tag{11}$$

$$c_3 = \frac{1}{30g}\left[\left(E - 4\omega - \frac{\Delta}{2}\right)b_2 + \omega z b_1 - g(z^2+1)c_1 + 9gzc_2\right], \tag{12}$$

$$b_3 = \frac{1}{30g}\left[\left(E - 4\omega + \frac{\Delta}{2}\right)c_2 + \omega z c_1 - g(z^2+1)b_1 + 9gzb_2\right]. \tag{13}$$

由式(12)和(13)可得

$$c_1 = \pm b_1, \tag{14}$$

$$\omega z = \pm g(z^2+1). \tag{15}$$

式(15)即

$$z = \pm\left(\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 4g}\right)/2g. \tag{16}$$

于是, 由式(10)和(11)有

$$\left(E - 2\omega - \frac{\Delta}{2}\right)b_1 + \omega z b_0 - g(z^2+1)c_0 + 5gzc_1 = 0, \tag{17}$$

$$\left(E - 2\omega + \frac{\Delta}{2}\right)c_1 + \omega z c_0 - g(z^2+1)b_0 + 5gzb_1 = 0. \tag{18}$$



式(17), (18)相加, 有

$$E = 2\omega - 5g z . \tag{19}$$

式(18) 减去式(17) 有

$$\Delta b_1 = [g(z^2 + 1) + \omega z](b_0 - c_0) = 2\omega z(b_0 - c_0). \tag{20}$$

利用式(8) 和(9), 得

$$b_0 = A c_0, \tag{21}$$

其中

$$A = (E + \frac{\Delta}{2} - gz)/(E - \frac{\Delta}{2} - gz). \tag{22}$$

于是, 由式(9), (20) 和(21) 有

$$\frac{\Delta^2}{4} = 4\omega^2 + 24g^2z^2 - 20\omega g z . \tag{23}$$

上述的式(23) 是一个限制性条件, 它规定了$\omega$, $\Delta$和$g$ 的关系. 也就是说, 对于波函数取$\psi_1 = \exp[-\frac{1}{2}z\alpha^2](b_0 + b_1\alpha^2)$ 和 $\psi_2 = \exp[-\frac{1}{2}z\alpha^2](c_0 + c_1\alpha^2)$ 的形式, 只有 $\omega$, $\Delta$ 和 $g$ 满足式(23), 我们才能得到如式(16) 和(19) 这样的近似解.

相似的, 只要我们增加式(4) 和(5) 中的级数项, 便能得到更多的试探波函数形式. 显然, 不同形式的试探波函数可得到不同的本征能量以及相应的限制性条件. 繁复的推导表明, 若令 $n > N$ 时, $b_n = c_n = 0$, 则可得

$$E = 2N\omega - (4N + 1)g z , \tag{24}$$

其中$z$ 仍由式(16) 决定. 不难看出, 在两光子情形下, 无旋转波近似的 JC 模型体系是双重简并的. 式(24) 所对应的限制性条件非常复杂冗长(在此略去不写), 其求解方法与上面类似.

## 2　小结

本文所用的相干态表象有时也被称为 Bargmann 表象, 它与 Fock 态表象可以很方便地互换. 利用性质

$$\int \frac{d\alpha d\alpha^*}{2\pi i} \exp(-|\alpha|^2) |\alpha^*\rangle\langle\alpha^*| = 1, \tag{25}$$

可得

$$|n\rangle = \int \frac{d\alpha d\alpha^*}{2\pi i} \exp(-|\alpha|^2) |\alpha^*\rangle\langle\alpha^*|n\rangle = \int \frac{d\alpha d\alpha^*}{2\pi i} \exp(-|\alpha|^2) |\alpha^*\rangle \frac{1}{\sqrt{n!}}\alpha^n. \tag{26}$$

因此, Fock 态表象下的 $|n\rangle$对应于相干态表象下的$\alpha^n$. 利用 Baker-Campbell-Hausdorff 公式, 不难得知, 位移 Fock 态对应于相干态表象中的 $e^{z\alpha}\alpha^{n-1}$和 $e^{z\alpha}\alpha^n$的迭加, 而压缩态 $\exp\{\frac{z a^{+2}}{2} - \frac{z^* a^2}{2}\}|n\rangle$则对应于 $e^{z\alpha^2/2}\alpha^n$. 因此, 上面所求的态其实是一系列压缩态的迭加.

另外, 本文在式(4), (5) 中给出的波函数是没有归一化的, 它并不影响求解系统的本征能量和相应的限制性条件. 如果式(4), (5) 中给出归一化的试探波函数形式, 那么以上推导步骤的表达式形式将更繁复, 而最后结果将仍与本文一样. 利用相干态的性质, 将式(4), (5) 归一化并不难, 我们可在求得本征能量和限制性条件后再做. 例如, 对于相干态 $b\alpha^n$, 其归一化态矢在 Fock 态中可形式上写为

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{A}}\int\frac{d\alpha d\alpha^*}{2\pi i}\exp(-|\alpha|^2)(b\alpha^n)|\alpha^*\rangle, \tag{27}$$

其中

$$A = \frac{-1}{4\pi^2}\int d\alpha d\alpha^* d\alpha' d\alpha'^* |b|^2(\alpha^n)(\alpha'^*)^n\exp(\alpha\alpha'^* - |\alpha|^2 - |\alpha'|^2), \tag{28}$$

则式(13)的归一化态矢在 Fock 态中为

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle\psi_1|\psi_1\rangle + \langle\psi_2|\psi_2\rangle}}\begin{pmatrix}|\psi_1\rangle\\ |\psi_2\rangle\end{pmatrix}. \tag{29}$$

在式(29)中, $|\psi_1\rangle$和$|\psi_2\rangle$分别对应于式(4)和(5)的归一化态矢在 Fock 态表象中的形式.

总之,在相干态表象中,通过给出试探波函数,然后对级数逐级截断的方法可以求出系统的本征能量的表达式以及相应的限制性条件.这种方法,可以方便地推广至多光子或更复杂的情况.必须指出,本文所得的式(19)和(24)都只是体系的特解,并非一般解,这是由体系的不可积特性所决定的.尽管如此,我们的结论可以当作今后与各种近似求解或数值求解作比较的参照物.另外,由于$\Delta$和$g$一般是不变的,那么调节$\omega$的值,利用式(23)的关系便可在实验上验证本文的结果,这是十分有意义的事情.

## 参　考　文　献


1 Jaynes E T, Cummings F W. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. Proc. IEEE. 1963, (51): 89～93

2 Maystre P. Theoretical developments in cavity quantum optics: a brief review. Phys. Rep., 1992, (2): 219～263

3 Walther H. Experiments on cavity quantum electrodynamics. Phys. Rep., 1992, (2) 219～269

4 Tavis M, Cummings F W. Exact solution for a n-molecular-field Hamiltonian. Phys. Rev., 1968, (2): 170～379

5 Negele J W, Orland H. Quantum many-particle system. Boston: Addison-Wesley Publishing Company, 1987. 20～21


# Stepwisely Approaching Solving the Two-Photon Jaynes-Cummings Model with Irrotational Wave Approximation


Yang Xiaoming① Feng Mang②

(① Dept. of Intern. Econ., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou;

② Wuhan Inst. of Phys. & Math., Chinese Academy of Science)



**Abstract** In coherent-state representation, the two-photon Jaynes-Cummings model is stepwisely approaching solved with irrotational wave approximation. The intrinsic energy of the system and corresponding restriction condition are obtained. This is a work of significance for going further into the nonlinear characteristic of this class of systems.



**Keywords** stepwisely approaching, irrotational wave approximation, Jaynes-Cummings model