

框架结构稳定分析的多参数空间梁单元^{*}

欧 阳 煜

(华侨大学土木工程系, 泉州 362011)

摘要 引入跨中竖向位移, 采用多参数确定空间单元位移函数, 并用子结构法消去竖向位移参数. 推导空间梁单元几何刚度矩阵及考虑跨中竖向位移后的固端力增量. 本法对空间框架结构进行稳定分析, 计算量没有增加, 精度却有较大提高.

关键词 稳定分析, 屈曲荷载, 多参数空间梁单元

分类号 TU 323. 501

目前, 在矩阵位移法对空间框架结构进行稳定分析时, 通常以每根杆件作为一个梁单元, 利用梁端位移确定单元位移函数, 从而求得单元刚度矩阵和几何刚度矩阵. 由于位移函数仅在单元端点连续, 因此对于一阶应力分析是精确的; 而对于二阶稳定分析, 未考虑单元内部位移连续, 势必有一定的误差. 对于某些框架结构, 特别是无侧移框架误差较大, 将导致结构不安全^[1, 2], 为了提高计算精度, 必需将一根杆件分为两个单元^[3], 导致计算量大为增加. 本文利用梁端位移参数及跨中竖向位移参数共同确定空间梁单元位移函数, 通过势能驻值原理($\delta\Pi = 0$) 推导出单元刚度矩阵和几何刚度矩阵, 并利用子结构法消去跨中竖向位移参数. 采用反幂法求解结构的屈曲荷载和屈曲模态, 并编制了可用于任意框架结构的通用计算程序. 计算量和一般矩阵位移法相同, 精度却大为提高.

1 单元刚度矩阵

现有如图1所示的空间梁单元. P 为梁单元轴向压力. 其中 跨中位移 $V^e = [V_Y \ V_Z]$, 跨中荷载 $q^e = [q_Y \ q_Z]$, 梁端力 $F^e = [F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4 \ F_5 \ F_6 \ F_7 \ F_8]$, 梁端位移 $U^e = [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4 \ U_5 \ U_6 \ U_7 \ U_8]$.

设单元弹性屈曲位移函数为

$$\begin{cases} Y(X) = A_1 X^4 + A_2 X^3 + A_3 X^2 + A_4 X + A_5, \\ Z(X) = B_1 X^4 + B_2 X^3 + B_3 X^2 + B_4 X + B_5, \end{cases}$$

利用8个梁端位移及2个跨中位移可求得位移函数

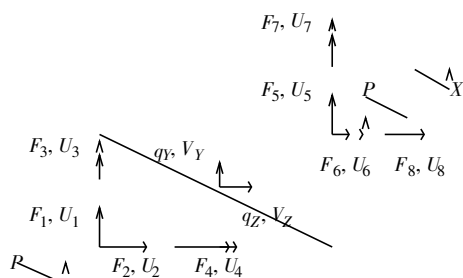


图1 空间梁单元

$$\begin{bmatrix} Y(X) \\ Z(X) \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} U^e \\ V^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & N_5 & 0 \\ 0 & N_1 & -N_2 & 0 & 0 & N_3 & -N_4 & 0 & 0 & N_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^e \\ V^e \end{bmatrix},$$

其中 $N_1 = -8\xi^4 + 18\xi^3 - 11\xi^2 + 1$, $N_2 = -2L\xi^4 + 5\xi^3 - 4L\xi^2 + L\xi$; $N_3 = -8\xi^4 + 14\xi^3 + L\xi^2$, $N_4 = 2L\xi^4 - 3\xi^3 + L\xi^2$, $N_5 = 16\xi^4 - 32\xi^3 + 16\xi^2$.

杆件总势能为

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{EI_Y}{2} \int_0^L (Y_{,xx})^2 dx + \frac{EI_Z}{2} \int_0^L (Z_{,xx})^2 dx \\ & - \frac{P}{2} \int_0^L (Y_{,x})^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^L (Z_{,x})^2 dx. \end{aligned}$$

根据势能驻值原理 $\delta\Pi = 0$ 得梁单元平衡方程

$$(K - PG)U = F, \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} F &= [F^e \quad q^e], \quad U = [U^e \quad V^e], \\ K &= K + \delta K = EI \int_0^L [N_{,xx}]^T [N_{,xx}] dx, \\ G &= G + \delta G = EI \int_0^L [N_{,x}]^T [N_{,x}] dx, \end{aligned}$$

K, G 是 10×10 矩阵, 其中 $1 \sim 8$ 行和 $1 \sim 8$ 列和一般空间梁单元刚度矩阵和几何刚度矩阵相同, 其余元素为零. $\delta K, \delta G$ 为考虑跨中位移后的多参数空间梁单元修正刚度矩阵和修正几何刚度矩阵, 阶数 10×10 .

2 子结构法消去竖向位移参数

将式(1)按梁端位移和跨中竖向位移分块, 即

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ib} \\ K_{bi} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^e \\ V^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^e \\ q^e \end{bmatrix},$$

式中下标 i 表示梁端位移编号, 下标 b 表示跨中位移. 为了减少自由度, 可以采用子结构方法消去跨中位移得

$$(K^e - PG^e)U^e = F^e - F^*,$$

其中 K^e 为一般空间梁单元刚度矩阵, G^e 为多参数空间梁单元几何刚度矩阵

$$G^e = \frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 36 & & & & & & & & & \\ & 36 & & & & & & & & \\ & & -3L & (3 + \alpha)L^2 & & & & & & \\ 3L & & 0 & 0 & (3 + \alpha)L^2 & & & & & \\ -36 & 0 & 0 & -3L & 36 & & & & & \\ & 0 & -36 & L & 0 & 0 & 36 & & & \\ & 0 & -3L & -\alpha L^2 & 0 & 0 & 3L & (3 + \alpha)L^2 & & \\ 3L & 0 & 0 & -\alpha L^2 & -3L & 0 & 0 & (3 + \alpha)L^2 \end{bmatrix},$$

其中 $k = \frac{PL^2}{EI_Y}$, $\alpha = \frac{168 + 3k_Y}{168 - 4k_Y}$, $k_z = \frac{PL^2}{EI_Z}$, $\alpha_z = \frac{168 + 3k_Z}{168 - 4k_Z}$.

当 $\alpha_y = 1, \alpha_z = 1$ 时, 即和一般梁单元几何刚度矩阵相同. F^* 为考虑跨中位移引起的固端荷载增量, 即

$$F^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -\beta_y & -1 & 0 & 0 & \beta_y \\ 0 & -1 & \beta_z & 0 & 0 & -1 & -\beta_z & 0 \end{bmatrix} q^e,$$

其中 $\beta_y = \frac{L}{32} \begin{pmatrix} 336 - k_y \\ 42 - k_y \end{pmatrix}, \beta_z = \frac{L}{32} \begin{pmatrix} 336 - k_z \\ 42 - k_z \end{pmatrix}.$

当梁单元承受轴向拉力时, P 换为 $-P$, 本文公式依然适用. 当不考虑节间荷载时, 取 $q = 0$, 其余公式不变.

3 计算方法

将各单元刚度从局部坐标转化到整体坐标下, 然后组合为结构的整体刚度矩阵. 利用结构达到临界状态时, 总势能的二阶变分为零 ($\delta^2 \Pi = 0$), 可得屈曲方程为

$$(K - PG)\delta U = 0.$$

求解屈曲方程是一个广义特征值问题. 在稳定分析中, 我们最关心的是结构最小临界荷载. 因此, 本文采用目前求解最小特征值最有效的方法——反幂法, 由于几何刚度矩阵也是轴力 P 的函数, 在求解时需将迭代法和反幂法联合应用.

4 算例分析

例1 如图2所示, 一端固定一端铰支的空间压杆, 屈曲临界荷载精确解为

$$P_{CR} = 20.19 \frac{EI}{L^2},$$

采用一般空间梁单元刚度矩阵, 将结构划分为一个单元, 求得屈曲临界荷载为

$$P_{CR} = 30.1 \frac{EI}{L^2},$$

误差为49.1%. 若将结构划分为两个单元, 求得屈曲临界荷载则为

$$P_{CR} = 27.7 \frac{EI}{L^2},$$

误差降低为12.0%, 而计算量增加了一倍.

采用本文多参数空间梁单元刚度矩阵, 将结构划分为一个单元, 求得屈曲临界荷载为

$$P_{CR} = 20.90 \frac{EI}{L^2},$$

误差仅为3.5%. 计算量没有增加, 而精度却大为提高.

例2 如图3所示的一个空间刚架. 不考虑杆件的轴向变形, 采用本文参数空间梁单元刚度所得屈曲临界荷载为

$$P_{CR} = 26.7 \frac{EI}{L^2}.$$

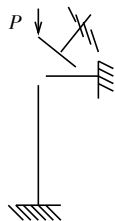


图2 空间压杆

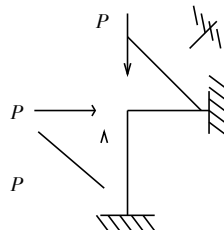


图3 空间框架

采用一般梁单元刚度求得曲临界荷载为

$$P_{\text{CR}} = 39.5 \frac{EI}{L^2},$$

两者误差达47.9%.

5 结束语

上述算例表明, 本文推导的多参数空间梁单元几何刚度矩阵, 由于考虑到梁跨中位移, 位移函数比推导一般空间梁单元几何刚度的位移函数更接近梁屈曲时的实际变形. 因而计算精度较高, 完全可以满足工程需要.

参 考 文 献

- 1 杨弗康. 结构力学. 北京: 高等教育出版社, 1983. 178 ~ 179
- 2 龙驭球. 结构力学. 北京: 人民教育出版社, 1981. 269 ~ 270
- 3 唐家祥. 结构稳定理论. 北京: 中国铁道出版社, 1989. 411 ~ 416
- 4 陈铁云. 结构的屈曲. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1993. 51 ~ 55

Multiparametric Space Beam Element in Stability

Analysis of Frame Structure

Ouyang Yu

(Dept. of Civil Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract A new method for stability analysis of space frame structure is present to improve the accuracy without incremental computation. The conventional method shows prominent error. This may be due to the fact that only displacement of beam ends is considered in derivating stiffness matrix. The author's method includes the introduction of midspan vertical displacement; the adoption of space unit by using minor structures; the computation of geometric stiffness matrix of space beam element; and the consideration of fixed-end force increment after midspan vertical displacement.

Keywords stability analysis, buckling load, multiparametric space beam element