第18卷　第4期
1997年10月
华侨大学学报(自然科学版)
Journal of Huaqiao University (Natural Science)
Vol.18　No.4
Oct.1997

非线性系统概周期解的存在性和唯一性及不稳定性*

王　全　义

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

摘要　研究一类非线性微分方程的概周期解的存在性、唯一性及不稳定性等问题.给出保证该方程的概周期解的存在性、唯一性及不稳定性的充分性条件.

关键词　微分方程, 概周期解, 存在性, 唯一性, 不稳定性
分类号　O 175.1

考虑下列非线性微分方程

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + g(t,x), \tag{1}$$

其中 $t\in R$, $x\in R^n$; $A(t) = (a_{ij}(t))_{n\times n}$ 是 R 上的一个 n 阶连续的函数矩阵; $g(t,x)$ 是 $R\times R^n$ 上的一个 n 维的连续函数. 文[1,2]研究了方程(1)的周期解的存在性问题. 在本文, 我们将研究方程(1)的概周期解的存在性、唯一性及不稳定性等问题, 得到了此方程存在着唯一的不稳定的概周期解的新结果.

1　主要结果

在本文, 我们作如下三个记号约定.

(1) 一个连续的概周期函数简称为 a.p. 函数.

(2) 一个 a.p. 函数 $f(t)$ 的平均值记为 $M[f(t)]$, 即 $M[f(t)] = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt =$ 常数.

(3) 对于 $x\in R^n$, 取其范数为 $\|x\| = \sum_{j=1}^{n}|x_j|$; 对于矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, 取它的范数为 $\|A\| = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$.

对于方程(1), 我们假定下列三个条件.

(1) $A(t)$ 是一个 n 阶的 a.p. 函数矩阵; $g(t,x)$ 关于 t 对 $x\in \mathbf{S}$(这里 $\mathbf{S}$ 是 R^n 中的任一紧集)是一致概周期的;

(2) 记 $a(t) = \min_{1\le j\le n}\{a_{jj}(t) - \sum_{i=1, i\ne j}^{n}|a_{ij}(t)|\}$, 则有 $M[a(t)] = a_1 > 0$.

(3) 存在着一个非负 a.p. 函数 $b(t)$ 具有 $M[b(t)] = b_1 < a_1$(其中 a_1 由条件(2)中给出)使得

* 本文1996-11-28收到;福建省自然科学基金和国务院侨办科研基金资助项目

对任意的 $t\in R$, x 和 $y\in R^n$ 都有下式成立:

$$\|g(t,x)-g(t,y)\|\le b(t)\|x-y\|.$$

于是我们有

定理1 如果条件(1)～(3)被满足,则方程(1)存在唯一的不稳定的 a.p. 解 $x=\varphi(t)$ 具有 $\mathrm{mod}(\varphi)\subset\mathrm{mod}(A,g)$.

定理2 如果条件(2)及(3)被满足,并且如果 $a(t)$, $b(t)$, $A(t)$ 及 $g(t,x)$ 还是 t 的 ω-周期函数,则方程(1)存在着唯一的、不稳定的 ω-周期解.

2 定理的证明

在证明定理之前,我们先介绍文[3]中的一个有用的引理.

引理1[3] 设 $f(t)$ 是一个 a.p. 函数,若 $M[f(t)]=-\alpha_1<0$, 则对任意的 $\tau\in R$, 有

$$\exp\left(\int_s^t f(u+\tau)\mathrm{d}u\right)\le\beta\exp(-\alpha(t-s)),\ (t\ge s),$$

其中 α, β 是不依赖于 τ 的正常数.

2.1 定理1的证明

因为 $g(t,0)$ 是 a.p. 函数,所以存在着正常数 C 使得 $\|g(t,0)\|\le C$.

(1) 先证方程(1)的任一解 $x(t)$ 当 $t\le 0$ 时有界.

设 $x(t)$ 是方程(1)的任意一个解. 取李雅普诺夫函数 $V(t)=-\|x(t)\|=-\sum_{i=1}^n|x_i(t)|$. 于是,沿着方程(1)的解计算 $V(t)$ 的 Dini 右导数,我们有

$$\begin{aligned}
D^+V(t)&=-\sum_{i=1}^n\mathrm{Sgn}x_i(t)\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}\\
&=-\sum_{i=1}^n\mathrm{Sgn}x_i(t)\left[\sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t)+g_i(t,x)\right]\\
&\le -a_{11}(t)|x_1(t)|+|a_{12}(t)||x_2(t)|+\cdots+|a_{1n}(t)||x_n(t)|\\
&\quad+|a_{21}(t)||x_1(t)|-a_{22}(t)|x_2(t)|+|a_{23}(t)||x_3(t)|+\cdots\\
&\quad+|a_{2n}(t)||x_n(t)|+\cdots+|a_{n1}(t)||x_1(t)|+\cdots\\
&\quad+|a_{nn-1}(t)||x_{n-1}(t)|-a_{nn}(t)|x_n(t)|+\|g(t,x)\|\\
&\le -\sum_{j=1}^n\left(a_{jj}(t)-\sum_{i=1,j\ne i}^n|a_{ij}(t)|\right)|x_j(t)|\\
&\quad+\|g(t,x)-g(t,0)\|+\|g(t,0)\|\\
&\le -a(t)\sum_{j=1}^n|x_j(t)|+b(t)\|x(t)\|+C\\
&=[a(t)-b(t)]V(t)+C.
\end{aligned}\tag{2}$$

于是有

$$D^+\left[V(t)\exp\left(\int_t^0[a(r)-b(r)]\mathrm{d}r\right)\right]\le C\exp\left(\int_t^0[a(r)-b(r)]\mathrm{d}r\right).$$

设 $t\le 0$, 在区间 $[t,0]$ 积分上式,得

$$V(0)-V(t)\exp\left[\int_t^0[a(r)-b(r)]\mathrm{d}r\right]\le C\int_t^0\exp\left(\int_s^0[a(r)-b(r)]\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s,$$

即有

$$-V(t) \leq -V(0)\exp\left(-\int^{0}[a(r)-b(r)]\mathrm{d}r\right)+C\int^{0}\exp\left(-\int[a(r)-b(r)]\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s,$$

所以

$$\|x(t)\| \leq \|x(0)\|\exp\left(-\int^{0}[a(r)-b(r)]\mathrm{d}r\right)$$

$$+C\int^{0}\exp\left(-\int[a(r)-b(r)]\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s, \qquad (t \leq 0). \tag{3}$$

由定理的条件得

$$M[-a(t)+b(t)] = -M[a(t)]+M[b(t)]$$

$$= -a_1+b_1 < 0.$$

因此由引理1可知存在着正常数 α, β 使得

$$\exp\left(-\int[a(r)-b(r)]\mathrm{d}r\right) \leq \beta\exp(-\alpha(s-t)), \qquad (s \geq t). \tag{4}$$

于是从式(3), (4) 得

$$\|x(t)\| \leq \|x(0)\|\beta\exp(\alpha t)+C\int_{t}^{0}\beta\exp(-\alpha(s-t))\mathrm{d}s$$

$$= \beta\|x(0)\|+\frac{C\beta}{\alpha}[1-\exp(\alpha t)]$$

$$\leq \beta\|x(0)\|+\frac{C\beta}{\alpha}, \qquad (t \leq 0). \tag{5}$$

因此, 方程(1) 的任一解 $x(t)$ 当 $t \leq 0$ 时有界.

(2) 证明方程(1) 的任一解都是渐近 a. p. 解.

设 $x(t)$ 是方程(1) 任一解. 由部分(1) 可知, 存在着正常数 K_1 使得当 $t \leq 0$ 时, 有 $\|x(t)\| \leq K_1$. 现在我们取 $\tau_j < 0$ $(j = 1, 2, 3, \cdots)$ 且 $\tau_j \to -\infty$ (当 $j \to +\infty$). 由于 $\{x(\tau_j)\}$ 是一个有界序列, 故存在着 $\{\tau_j\}$ 的一个子序列 $\{\tau_k\}$ 是收敛的. 记 $\mathbf{S} = \{x \mid \|x\| \in R^n$ 且 $\|x\| \leq K_1\}$. 因为 $g(t, x)$ 关于 t 对 $x \in \mathbf{S}$ 是一致 a. p. 函数且 $A(t)$ 也是 a. p. 函数矩阵. 故存在着子序列 $\{t_k\} \subset \{\tau_k\}$ 使得 $\{g(t+t_k, x)\}$ 及 $A(t+t_k)$ 分别在 $R \times \mathbf{S}$ 及 R 上是一致收敛的.

下面证明 $\{x(t+t_k)\}$ 在 R_- 上是一致收敛的.

记 $y_k(t) = x(t+t_k)$. 显然, $y_k(t)$ 是方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = A(t+t_k)y+g(t+t_k, y) \tag{6}$$

过点 $(0, x(t_k))$ 的解且当 $t \leq 0$ 时, $\|y_k(t)\| \leq K_1$.

记 $V_{km}(t) = -\|x(t+t_k)-x(t+t_m)\| = -\sum_{i=1}^{n}|x_i(t+t_k)-x_i(t+t_m)|$. 于是沿着方程(6) 的解计算 $V_{km}(t)$ 的 Dini 右导数可得

$$D^+V_{km}(t) = -\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Sgn}[x_i(t+t_k)-x_i(t+t_m)]$$

$$\times\left[\frac{\mathrm{d}x_i(t+t_k)}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}x_i(t+t_m)}{\mathrm{d}t}\right]$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Sgn}[x_i(t+t_k)-x_i(t+t_m)]\left\{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t+t_k)x_j(t+t_k)\right.$$

$$
\begin{aligned}
& - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t+t_m) x_j(t+t_m) + g_i(t+t_k, x(t+t_k)) \\
& - g_i(t+t_m, x(t+t_m)) \} \\
= & - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Sgn}\, [x_i(t+t_k) - x_i(t+t_m)] \{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t+t_k) [x_j(t+t_k) \\
& - x_j(t+t_m)] + \sum_{j=1}^{n} [a_{ij}(t+t_k) - a_{ij}(t+t_m)] x_j(t+t_m) \\
& + [g_i(t+t_k, x(t+t_k)) - g_i(t+t_k, x(t+t_m))] \\
& + [g_i(t+t_k, x(t+t_m)) - g_i(t+t_m, x(t+t_m))] \} \\
\leq & - \sum_{j=1}^{n} [a_{jj}(t+t_k) - \sum_{i=1, i\neq j}^{n} a_{ij}(t+t_k)] \\
& \times x_j(t+t_k) - x_j(t+t_m) \\
& + A(t+t_k) - A(t+t_m) \quad x(t+t_m) \\
& + g(t+t_k, x(t+t_k)) - g(t+t_k, x(t+t_m)) \\
& + g(t+t_k, x(t+t_m)) - g(t+t_m, x(t+t_m)) \\
\leq & - a(t+t_k) \quad x(t+t_k) - x(t+t_m) \quad + b(t+t_k) \quad x(t+t_k) \\
& - x(t+t_k) \quad + K_1 l_{km} + L_{km} \\
= & [a(t+t_k) - b(t+t_k)] V_{km}(t) + K_1 l_{km} + L_{km},
\end{aligned}
$$

其中

$$ l_{km} = \sup\{ A(t+t_k) - A(t+t_m) \quad t \leq 0 \}, \tag{7} $$

$$ L_{km} = \sup\{ g(t+t_k, x(t+t_m)) - g(t+t_m, x(t+t_m)) \quad t \leq 0 \}. \tag{8} $$

于是有

$$
\begin{aligned}
& D^{+} [V_{km}(t) \exp(\int_t^0 [a(r+t_k) - b(r+t_k)] \mathrm{d}r \\
& \leq (K_1 l_{km} + L_{km}) \exp(\int_t^0 [a(r+t_k) - b(r+t_k)] \mathrm{d}r).
\end{aligned} \tag{9}
$$

所以, 当 $t \leq 0$ 时

$$
\begin{aligned}
& V_{km}(0) - V_{km}(t) \exp(\int_t^0 [a(r+t_k) - b(r+t_k)] \mathrm{d}r) \\
& \leq (K_1 l_{km} + L_{km}) \int_t^0 \exp(\int_s^0 [a(r+t_k) - b(r+t_k)] \mathrm{d}r) \mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{aligned}
& x(t+t_k) - x(t+t_m) \quad \leq \quad x(t_k) - x(t_m) \\
& \times \exp(- \int_t^0 [a(r+t_k) - b(r+t_k)] \mathrm{d}r) \\
& + (K_1 l_{km} + L_{km}) \int_t^0 \exp(- \int_t^s [a(r+t_k) - b(r+t_k)] \mathrm{d}r) \mathrm{d}s, \qquad (t \leq 0).
\end{aligned} \tag{10}
$$

由定理的条件及引理1可知, 存在着正常数 α, β 使得

$$ \exp(- \int_t^s [a(r+t_k) - b(r+t_k)] \mathrm{d}r) \leq \beta \exp(- \alpha(s-t)), \qquad (s \geq t). \tag{11} $$

于是由式(10)及(11)得到

$$
\begin{aligned}
& x(t+t_k)-x(t+t_m) \\
\leq\ & x(t_k)-x(t_m)\quad \beta\exp(\alpha t) \\
& +(K_1 l_{km}+L_{km})\int \beta\exp(-\alpha(s-t))\,\mathrm{d}s \\
\leq\ & \beta\ x(t_k)-x(t_m)\ +(K_1 l_{km}+L_{km})\frac{\beta}{\alpha}[1-\exp(\alpha t)] \\
\leq\ & \beta\ x(t_k)-x(t_m)\ +\frac{\beta}{\alpha}(K_1 l_{km}+L_{km}),\ (0\geq t).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

因为$\{x(t_j)\}$收敛, 故对任意给定的$\epsilon>0$, 存在着自然数N_1充分大使得当K和$m>N_1$时有

$$x(t_k)-x(t_m)\ <\frac{\epsilon}{3\beta}. \tag{13}$$

又$\{A(t+t_k)\}$在R上也一致收敛, 因此存在着自然数N_2充分大使得当K和$m>N_2$时有

$$l_{km}<\frac{\epsilon\alpha}{3\beta K_1},$$

又由于$\{g(t+t_k,x\}$在$R\times\mathbf{S}$上一致收敛, 因此存在着自然数N_3充分大使得当K和$m>N_3$时有

$$L_{km}<\frac{\epsilon\alpha}{3\beta}. \tag{15}$$

现在取

$$N=\max\{N_1,N_2,N_3\}.$$

于是由式(12)～(15)可知, 当K和$m>N$时有

$$
\begin{aligned}
x(t+t_k)-x(t+t_m)\ &<\beta\ \frac{\epsilon}{3\beta}+\frac{K_1\beta}{\alpha}\ \frac{\epsilon\alpha}{3K_1\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\ \frac{\alpha\epsilon}{3\beta} \\
&=\epsilon,\qquad (t\leq 0).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

此即$\{x(t+t_k)\}$在R_-上一致收敛. 因此$x(t)$是方程(1)的一个渐近a. p. 解.

(3) 从部分(2)及定理5. 1[4]可知, 方程(1)至少存在一个a. p. 解$x=\varphi(t)$.

(4) 证明a. p. 解$x=\varphi(t)$是唯一的且是不稳定的.

设$\varphi_1(t)$及$\varphi_2(t)$是方程(1)的任意两个不同的解. 记$V(t)=-\ \varphi_1(t)-\varphi_2(t)$. 利用部分(2)证明方法, 我们可得

$$D^+V(t)\leq[a(t)-b(t)]V(t) \tag{17}$$

于是有

$$
\begin{aligned}
-V(s)&\leq -V(t)\exp\left(-\int[a(r)-b(r)]\mathrm{d}t\right. \\
&\leq -V(t)\beta\exp(-\alpha(t-s)),\qquad (t\geq s).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

即

$$\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\ \geq\frac{1}{\beta}\ \varphi_1(s)-\varphi_2(s)\ \exp(\alpha(t-s)),\qquad (t\geq s). \tag{19}$$

由此可知方程(1)的任一解都是不稳定的.

如果方程(1)有两个不同的a. p. 解, 比如$x=\varphi_1(t)$和$x=\varphi_2(t)$, 于是就有正常数L使得$\sup\{\ \varphi_2(t)-\varphi_1(t)\ \forall t\in R\}<L$. 但由式(19)可知, 当$t\to+\infty$时, 有$\ \varphi_2(t)-\varphi_1(t)\ \to+\infty$. 这就发

生了矛盾.这个矛盾说明方程(1)的a.p.解是唯一的.

(5) 由文[5]中的定理17.2可知 $\mathrm{mod}(\varphi)\subset \mathrm{mod}(A,g)$.定理1证毕.

2.2 定理2的证明

由定理1可知方程(1)存在着唯一的、不稳定的a.p.解 $x=\varphi(t)$.因为 $g(t+\omega)=g(t,x)$ 且 $A(t+\omega)=A(t)$,故 $\varphi(t+\omega)$ 也是方程(1)的一个a.p.,而从方程(1)的a.p.解的唯一性可知 $\varphi(t+\omega)=\varphi(t)$,$(t\in R)$,即 $\varphi(t)$ 是方程(1)的唯一 ω-周期解.定理2证毕.

参 考 文 献

1 Wang Lian, Wang Muqiu. On periodic solution of higher order nonlinear periodic system. Ann. of Diff. Eqs., 1987, 3(1): 87～110

2 王全义.一类高维周期系统的周期解.华侨大学学报(自然科学版), 1994, 15(4): 363～368

3 王全义.概周期解的存在性、唯一性与稳定性.数学学报, 1997, 40(1): 80～89

4 林振声.概周期微分方程与积分流形.上海:上海科学技术出版社, 1986.156～157

5 Yoshizawa T. Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions. New York: Springer-Verlag, 1975.171～172

Existence and Uniqueness and Instability of Almost Periodic Solutions to Nonlinear Systems

Wang Quanyi

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract With respect to the almost periodic solutions to a class of nonlinear differential equations, a study is made on their existence and uniqueness and instability. Sufficient conditions are given to the almost periodic solutions of these equations for ensuring their existence and uniqueness and instability.

Keywords differential equations, almost periodic solution, existence, uniquenesss, instability