第18卷 第4期
1997年10月
华侨大学学报(自然科学版)
Journal of Huaqiao University (Natural Science)
Vol.18 No.4
Oct.1997

四阶抛物型方程两类新的恒稳差分格式*

曾 文 平

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

摘要 对四阶抛物型方程 $U_t+U_{xxxx}=0$提出两类新的三层隐式差分格式,其局部截断误差阶分别为 $O(\Delta t^2+\Delta x^2)$ 和 $O(\Delta t^2+\Delta x^4)$. 当参数适当选取时, 这些格式都是绝对稳定的且可用追赶法求解. 数值例子表明这些格式是有效的.

关键词 四阶抛物型方程, 无条件稳定, 隐式差分格式

分类号 O 241.82

考虑下列四阶抛物型方程初边值问题

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0 \qquad (0<x<1, 0<t\leq T),\\&u(x,0)=f(x) \qquad (0\leq x\leq 1),\\&u(0,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t)=u(1,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1,t)=0 \qquad (0\leq t\leq T).\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

1960年, ±½Ì¶ 在文〔〕中对四阶抛物型方程(1)构造了一个显式格式, 但稳定性条件为 $r=\Delta t/\Delta x^4\leq 1/8$, 十分苛刻. 他又提出了两个隐式差分格式, 其局部截断误差阶分别为 $O(\Delta t^2+\Delta x^2)$ 和 $O(\Delta t^2+\Delta x^4)$.

本文构造了两类新的恒稳的差分格式. 首先提出了一类简明而实用的θ格式, 其局部截断误差阶为 $O(\Delta t^2+\Delta x^2)$, 然后提出一类含多参数的差分格式, 当适当选取参数时, 其局部截断误差阶可达 $O(\Delta t^2+\Delta x^4)$. 所有这两类格式都是绝对稳定的三层、五对角线型的隐式差分格式, 它们都可用追赶法解之. 最后, 数值例子表明这些格式是有效的.

当 $f(x)$ 足够光滑时, 问题(1)的解存在且唯一, 并可表示为级数形式. 现在设问题(1)的解 $u(x,t)$ 充分光滑, 则由方程(1)可得下列关系式成立:

$$\frac{\partial^{q+p}u}{\partial t^q\partial x^p}=(-1)^q\frac{\partial^{4q+p}u}{\partial x^{4q+p}} \quad (p,q=0,1,2,\cdots). \tag{2}$$

又设时间步长为 Δt, 空间步长为 Δx, 网格区域由点集 (x_m, t_n) $(m=0,1,\cdots,M; n=0,1,2,\cdots)$ 所组成, 其中 $x_m=m\Delta x$, $\Delta x=\dfrac{1}{M}$, $t_n=n\Delta t$. 又设 $r=\Delta t/\Delta x^4$为网格比. 初边界条件的离散化处理同文〔〕, 从略.

引入关于 x 的四阶中心差分记号:

$$\delta_x^4 U_m^n=U_{m+2}^n-4U_{m+1}^n+6U_m^n-4U_{m-1}^n+U_{m-2}^n. \tag{3}$$

* 本文1997-04-10收到; 福建省自然科学基金资助项目

1　差分格式的构造

1.1　θ格式

$$\frac{U_m^{n+1}-U_m^{n-1}}{2\Delta t}+\frac{\theta\delta_x^4U_m^{n+1}+(1-2\theta)\delta_x^4U_m^n+\theta\delta_x^4U_m^{n-1}}{\Delta x^4}=0 \tag{4}$$

在网格点$(m\Delta x, n\Delta t)$处进行Taylor展开得

$$\frac{U_m^{n+1}-U_m^{n-1}}{2\Delta t}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\Delta t^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+O(\Delta t^4), \tag{5}$$

$$\frac{1}{\Delta x^4}\delta_x^4U_m^n=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{1}{6}\Delta x^2\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+\frac{1}{80}\Delta x^4\frac{\partial^8 u}{\partial x^8}+\frac{17}{30\,240}\Delta x^6\frac{\partial^{10} u}{\partial x^{10}}+O(\Delta x^8), \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta x^4}\delta_x^4U_m^{n\pm1}=&\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+\frac{\Delta x^4}{80}\frac{\partial^8 u}{\partial x^8}+\frac{17}{30\,240}\Delta x^6\frac{\partial^{10} u}{\partial x^{10}}\\&\pm\Delta t\frac{\partial^5 u}{\partial t\partial x^4}\pm\frac{1}{6}\Delta t\Delta x^2\frac{\partial^7 u}{\partial t\partial x^6}\pm\frac{1}{80}\Delta t\Delta x^4\frac{\partial^9 u}{\partial t\partial x^8}+\frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^6 u}{\partial t^2\partial x^4}\\&+\frac{1}{12}\Delta t^2\Delta x^2\frac{\partial^8 u}{\partial t^2\partial x^6}+O(\Delta t\Delta x^6+\Delta t^2\Delta x^4+\Delta x^8).\end{aligned} \tag{7}$$

于是, 由式(2)及式(5)～(7)便得如下关系式

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{1}{6}\Delta x^2\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+\frac{1}{80}\Delta x^4\frac{\partial^8 u}{\partial x^8}+\frac{\Delta t^2}{6}(1-6\theta)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\\&+O(\Delta t\Delta x^6+\Delta t^2\Delta x^2+\Delta x^8)=0.\end{aligned} \tag{8}$$

由此可见, 差分格式(4)的局部截断误差阶当$\theta\neq\frac{1}{6}$时为$O(\Delta t^2+\Delta x^2)$; 当$\theta=\frac{1}{6}$时为

$$O(\Delta x^2+\Delta t\Delta x^6+\Delta x^2\Delta t^2+\Delta x^8+\Delta x^3),$$

但此时不满足稳定性条件. 因此, 误差阶不能更高了.

特例1. 当$\theta=\frac{1}{2}$时为三层10点隐式格式

$$\frac{U_m^{n+1}-U_m^{n-1}}{2\Delta t}+\frac{\delta_x^4(U_m^{n+1}+U_m^{n-1})}{2\Delta x^4}=0. \tag{9}$$

特例2. 当$\theta=\frac{1}{3}$时为三层15点隐式格式

$$\frac{U_m^{n+1}-U_m^{n-1}}{2\Delta t}+\frac{\delta_x^4(U_m^{n+1}+U_m^n+U_m^{n-1})}{3\Delta x^4}=0. \tag{10}$$

特例3. 当$\theta=\frac{1}{4}$时为三层15点隐式格式

$$\frac{U_m^{n+1}-U_m^{n-1}}{2\Delta t}+\frac{\delta_x^4(U_m^{n+1}+2U_m^n+U_m^{n-1})}{4\Delta x^4}=0. \tag{11}$$

格式(9)～(11)的局部截断误差阶都是$O(\Delta t^2+\Delta x^2)$, 且由后面的稳定性分析可知它们都是绝对稳定的.

1.2　高精度格式

用如下含参数的差分格式逼近四阶抛物型方程(1):

$$\frac{\xi_1}{2}\frac{U_{m+1}^{n+1}-U_{m+1}^{n-1}}{2\Delta t}+\xi_0\frac{U_m^{n+1}-U_m^{n-1}}{2\Delta t}+\frac{\xi_1}{2}\frac{U_{m-1}^{n+1}-U_{m-1}^{n-1}}{2\Delta t}$$

$$+\eta_0\frac{\delta_x^4U_m^n}{\Delta x^4}+\frac{\eta_1}{2}\frac{\delta_x^4(U_m^{n+1}+U_m^{n-1})}{\Delta x^4}=0, \tag{12}$$

其中ξ_0,ξ_1,η_0和η_1为待定参数,应选取使得逼近阶尽可能高且保证差分格式的稳定性.

利用关系式(5)～(7)及下列关系式

$$\frac{U_{m\pm1}^{n-1}-U_{m\pm1}^{n-1}}{2\Delta t}=\frac{\partial u}{\partial t}\pm\Delta x\frac{\partial^2u}{\partial t\partial x}+\frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^3u}{\partial t\partial x^2}\pm\frac{\Delta x^3}{6}\frac{\partial^4u}{\partial t\partial x^3}+\frac{\Delta x^4}{24}\frac{\partial^5u}{\partial t\partial x^4}$$
$$+\frac{\Delta t^2}{6}\frac{\partial^3u}{\partial t^3}\pm\frac{\Delta x\Delta t^2}{6}\frac{\partial^4u}{\partial t^3\partial x}+\frac{\Delta t^2\Delta x^2}{12}\frac{\partial^5u}{\partial t^3\partial x^2}+O(\Delta x^5+\Delta t^4), \tag{13}$$

便得在网格点$(m\Delta x,n\Delta t)$处的如下Taylor展开式

$$(\xi_0+\xi_1)\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\xi_1}{2}\Delta x^2\frac{\partial^3u}{\partial t\partial x^2}+\xi_1\frac{\Delta x^4}{24}\frac{\partial^5u}{\partial x^4\partial t}+\frac{1}{6}(\xi_0+\xi_1)\Delta t^2\frac{\partial^3u}{\partial t^3}$$
$$+\frac{1}{12}\xi_1\Delta t^2\Delta x^2\frac{\partial^5u}{\partial t^3\partial x^2}+O(\Delta x^4+\Delta t^2\Delta x^4+\Delta x^6)$$
$$+(\eta_0+\eta_1)\frac{\partial^4u}{\partial x^4}+\frac{1}{6}(\eta_0+\eta_1)\Delta x^2\frac{\partial^6u}{\partial x^6}+\frac{1}{80}(\eta_0+\eta_1)\Delta x^4\frac{\partial^8u}{\partial x^8}$$
$$+\frac{17}{30240}(\eta_0+\eta_1)\Delta x^6\frac{\partial^{10}u}{\partial x^{10}}+\frac{1}{2}\eta_1\Delta t^2\frac{\partial^6u}{\partial x^4\partial t^2}+\frac{1}{6}\eta_1\Delta t^2\Delta x^2\frac{\partial^8u}{\partial x^6\partial t^2}$$
$$+O(\Delta x^6+\Delta x^4+\Delta t^2). \tag{14}$$

再利用式(2)可知,要使格式(12)逼近方程(1),使局部截断误差阶达到$O(\Delta t^2+\Delta x^4)$,必须同时满足下列诸条件:

$$\xi_0+\xi_1=1,\eta_0+\eta_1=1,\frac{\xi_1}{2}-\frac{1}{6}(\eta_0+\eta_1)=0, \tag{15}$$

解得

$$\xi_0=\frac{2}{3},\xi_1=\frac{1}{3},\eta_1=\eta\text{(自由参数)},\eta_0=1-\eta. \tag{16}$$

此时差分格式(12)成为如下的η格式

$$\frac{1}{12}\frac{U_{m+1}^{n+1}-U_{m+1}^{n-1}}{\Delta t}+\frac{2}{6}\frac{U_m^{n+1}-U_m^{n-1}}{\Delta t}+\frac{1}{12}\frac{U_{m-1}^{n+1}-U_{m-1}^{n-1}}{\Delta t}$$
$$+\eta\frac{\delta_x^4U_m^n}{\Delta x^4}+\frac{1-\eta}{2}\frac{\delta_x^4U_m^{n+1}+\delta_x^4U_m^{n-1}}{\Delta x^4}=0. \tag{17}$$

特例1. 当$\eta=\frac{1}{2}$时η格式成为如下的三层15点隐式格式

$$\frac{1}{12}\frac{U_{m+1}^{n+1}-U_{m+1}^{n-1}}{\Delta t}+\frac{2}{6}\frac{U_m^{n+1}-U_m^{n-1}}{\Delta t}+\frac{1}{12}\frac{U_{m-1}^{n+1}-U_{m-1}^{n-1}}{\Delta t}$$
$$+\frac{\delta_x^4U_m^{n+1}+2\delta_x^4U_m^n+\delta_x^4U_m^{n-1}}{4\Delta x^4}=0, \tag{18}$$

其局部截断误差阶为$O(\Delta t^2+\Delta x^4)$.

特例2. 当$\eta=\frac{-1}{9}$时η格式成为如下的三层15点隐式格式

$$\frac{1}{12}\frac{U_{m+1}^{n+1}-U_{m+1}^{n-1}}{\Delta t}+\frac{2}{6}\frac{U_m^{n+1}-U_m^{n-1}}{\Delta t}+\frac{1}{12}\frac{U_{m-1}^{n+1}-U_{m-1}^{n-1}}{\Delta t}$$
$$+\frac{10\delta_x^4U_m^{n+1}-2\delta_x^4U_m^n+10\delta_x^4U_m^{n-1}}{18\Delta x^4}=0, \tag{19}$$

其局部截断误差阶为 $O(\Delta t^2 + \Delta x^4)$.

如果要使格式(12)逼近方程(1)的局部截断误差阶达到 $O(\Delta t^4 + \Delta t^4\Delta x^2 + \Delta x^4)$, 则必须同时满足下列诸条件:

$$\left.\begin{aligned}
&\xi_0 + \xi_1 = 1,\\
&\eta_0 + \eta_1 = 1,\\
&\frac{\xi_1}{2} - \frac{1}{6}(\eta_0 + \eta_1) = 0,\\
&\frac{1}{6}(\xi_0 + \xi_1) - \frac{1}{2}\eta_1 = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

由此解得 $\xi_0 = \frac{2}{3}, \xi_1 = \frac{1}{3}, \eta_0 = \frac{2}{3}, \eta_1 = \frac{1}{3}$. 这时, 差分格式(12)成为如下格式

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{12}\,\frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m+1}^{n-1}}{\Delta t} + \frac{2}{6}\,\frac{U_m^{n+1} - U_m^{n-1}}{\Delta t} + \frac{1}{12}\,\frac{U_{m-1}^{n+1} - U_{m-1}^{n-1}}{\Delta t}\\
&\qquad + \frac{\delta_x^4 U_m^{n+1} + 4\delta_x^4 U_m^n + \delta_x^4 U_m^{n-1}}{6\Delta x^4} = 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

然而, 由后面的稳定性分析可知, 它是绝对不稳定的.

最后, 必须指出, 如果要使格式(12)逼近方程(1)的局部截断误差阶达到 $O(\Delta t^2 + \Delta t^2\Delta x^2 + \Delta x^6)$, 则必须同时满足下列诸条件:

$$\left.\begin{aligned}
&\xi_0 + \xi_1 = 1,\\
&\eta_0 + \eta_1 = 1,\\
&\frac{\xi_1}{2} - \frac{1}{6}(\eta_0 + \eta_1) = 0,\\
&\frac{\xi_1}{24} - \frac{1}{80}(\eta_0 + \eta_1) = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

然而, 式(22)的最后两式互相矛盾, 因此格式(12)的局部截断误差只能达到 $O(\Delta t^2 + \Delta x^4)$ 而不可能更高了.

值得注意的是, 格式(12)的相容性条件为 $\xi_0 + \xi_1 = 1, \eta_0 + \eta_1 = 1$. 它的局部截断误差阶为 $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$. 特别地, 如果取 $\xi_0 = 1, \xi_1 = 0, \eta_0 = 1 - 2\theta, \eta_1 = 2\theta$ 便可得 θ 格式(4). 但为使用方便起见, 我们仍另列讨论.

2　稳定性分析

引理1[2]　实系数二次方程

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \qquad (A > 0)$$

的两根按模≤1的充要条件为

$$A - C \geq 0, A + B + C \geq 0 \text{ 且 } A - B + C \geq 0.$$

现用Fourier分析法[3]研究差分格式的稳定性. 首先我们有

$$e^{-im\alpha}\delta_x^4 e^{im\alpha} = \left(-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 16S^2 \qquad (|\alpha| < \pi), \tag{23}$$

其中 $i = \sqrt{-1}, S = \sin\frac{\alpha}{2}$.

令 $U_m^n=\lambda^n e^{im\alpha}$ ($\alpha<\pi$) 代入三层差分格式(θ 格式(4) 或 η 格式(17)),得传播矩阵

$$G(\Delta t, m)=\begin{pmatrix} -\dfrac{B}{A} & -\dfrac{C}{A} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

其特征方程为

$$A\lambda^2+B\lambda+C=0. \tag{25}$$

下面首先分别就 θ 格式(4) 与 η 格式(17) 的稳定性进行讨论.

2.1 θ 格式(4)

这时,特征方程中的系数为

$$\begin{cases} A=1+32r\theta S^4, \\ B=32r(1-2\theta)S^4, \\ C=-(1-32r\theta S^4). \end{cases}$$

显然,对任意 $\theta\geq 0$, $r>0$ 均有

$$\begin{cases} A=1+32r\theta S^4\geq 1>0, \\ A-C=2>0, \\ A+B+C=32rS^4\geq 0. \end{cases}$$

又当 $\theta\geq\dfrac{1}{4}$ 时,对任意 $r>0$ 均有

$$A-B+C=-32r(1-4\theta)S^4\geq 0,$$

因而满足引理条件. 由引理结论知特征方程的两报按模 ≤ 1. 又 $A-C>0$ 不可能有等于1的重根. 于是有

定理1 当参数 $\theta\geq\dfrac{1}{4}$ 时,四阶抛物型方程初边值问题(1) 的 θ 差分格式(4) 绝对稳定.

特别地,格式(9) ～(11) 绝对稳定.

2.2 η 格式(17)

这时特征方程中的系数为

$$\begin{cases} A=2+4\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-96(1-\eta)rS^4, \\ B=192\eta rS^4, \\ C=-\left[2+4\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-96(1-\eta)rS^4\right]. \end{cases}$$

显然,当 $\eta\leq 1$ 时有 $A\geq 2>0$, $A-C=4+8\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\geq 4>0$, $A+B+C=192rS^4\geq 0$. 且当 $\eta\leq\dfrac{1}{2}$ 时有 $A-B+C=192r(1-2\eta)rS^4\geq 0$. 综上所述,当参数 $\eta\leq\dfrac{1}{2}$ 时满足引理条件. 根据引理知特征方程两根按模 ≤ 1. 又 $A-C>0$,故不可能有等于1的重根. 于是有

定理2 对任何参数 $\eta\leq\dfrac{1}{2}$ 时,四阶抛物型方程的初边值问题(1) 的 η 差分格式(17) 绝对稳定.

特别地,格式(18),(19) 绝对稳定.

最后,我们指出格式(21) 是绝对不稳定的. 事实上,格式(21) 的特征方程为

$$(4+2\cos\alpha+32rS^4)\lambda^2+128rS^4\lambda-(4+2\cos\alpha-32rS^4)=0. \tag{26}$$

它有一根为

$$\lambda_2=\frac{-128rS^4-2\sqrt{(4+2\cos\alpha)^2+3(32rS^4)^2}}{2(4+2\cos\alpha+32rS^4)} < \frac{-128rS^4-2(4+2\cos\alpha)}{2(4+2\cos\alpha+32rS^4)} < -1. \tag{27}$$

从而对任意 $r>0$, 均有 $\lambda_2 > 1$. 因此, 格式(21)是绝对不稳定的. 数值试验也证实了这一结论, 详见数值例子及附表.

附表　差分格式(19),(18),(11),(10)和(9)的解与精确解比较表

r	x	精确解	格式(19)解	格式(18)解	格式(11)解	格式(10)解	格式(9)解
	$\pi/10$	0.116665	0.116665	0.117233	0.118536	0.118539	0.117959
	$2\pi/10$	0.221910	0.221911	0.222991	0.225469	0.225475	0.224372
1/2	$3\pi/10$	0.305433	0.305434	0.306921	0.310331	0.310339	0.308822
	$4\pi/10$	0.359058	0.359059	0.360807	0.364816	0.364826	0.363042
	$5\pi/10$	0.377535	0.377537	0.379375	0.383591	0.383600	0.381725
	$\pi/10$	0.044045	0.044043	0.044476	0.045468	0.045477	0.045025
	$2\pi/10$	0.083779	0.083775	0.084599	0.086485	0.086502	0.085642
1	$3\pi/10$	0.115312	0.115306	0.116440	0.119037	0.119060	0.117877
	$4\pi/10$	0.135557	0.135551	0.136884	0.139936	0.139963	0.138572
	$5\pi/10$	0.142533	0.142527	0.143928	0.147138	0.147166	0.145704
	$\pi/10$	0.00627788	0.00627461	0.00639968	0.00668937	0.00670120	0.06558066
	$2\pi/10$	0.01194124	0.00119350	0.01217296	0.01272393	0.01274643	0.01247418
5	$3\pi/10$	0.01643571	0.01642726	0.01675460	0.01751298	0.01754396	0.01716924
	$4\pi/10$	0.01932133	0.01931134	0.01969628	0.02058775	0.02062416	0.02018365
	$5\pi/10$	0.02031565	0.02030510	0.02070980	0.02164724	0.02168533	0.02122235
	$\pi/10$	0.0000181786	0.0000180185	0.0000191193	0.0000201502	0.0000260702	0.0000201502
	$2\pi/10$	0.0000345777	0.0000342731	0.0000363703	0.0000383281	0.0000495800	0.0000383281
1/2	$3\pi/10$	0.0000475921	0.0000471729	0.0000500542	0.0000527539	0.0000682410	0.0000527539
	$4\pi/10$	0.0000559478	0.0000554551	0.0000588500	0.0000620156	0.0000802201	0.0000620156
	$5\pi/10$	0.0000588270	0.0000583089	0.0000618677	0.0000652091	0.0000843500	0.0000652091

3　数值例子

解下列四阶抛物型方程混合问题

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0 \qquad (0<x<\pi, T>0),\\
&u(x,0)=\sin x \qquad (0\le x\le \pi),\\
&u(0,t)=\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2}=u(\pi,t)=\frac{\partial^2 u(\pi,t)}{\partial x^2}=0 \qquad (t>0).
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

其精确解为

$$U(x,t)=e^{-t}\sin x. \tag{29}$$

取 $\Delta x=\dfrac{\pi}{M}$, $M=10$, $\Delta t=r\Delta x^4$, $r=\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{2}$, 1, 2和5, 对本文所列的几个特例格式(19), (18), (11), (10), (9)进行计算到 $n=200$, 并与精确解列表比较, 如附表所示. 数值例子表明我们对稳定性与精度所作的分析是正确的, 数值结果与理论分析相吻合. 这也进一步证明这些格式是有效的. 其中尤以格式(19)的精度最好.

下面列出三点说明.

(1) 由于本文所构造的格式都是三层格式, 故除初始层网格函数值已知外, 还需先用其他方法计算第一层网格函数值. 为方便计, 我们按精确值计算第一层网格函数值.

(2) 边界条件处理同文〔〕, 即用中心差商代替微商. 因此有

$$U_0^n=U_M^n=0,\quad U_{-1}^n=-U_1^n,\quad U_{M+1}^n=-U_{M-1}^n,$$

而初始条件则直接转移, $U_m^0=\sin m\Delta x$.

(3) 由于精确解具有对称性, 即

$$e^{-n\Delta t}\sin\frac{10-i}{10}\pi=e^{-n\Delta t}\sin\frac{i}{10}\pi\quad(i=1,2,3,4,5),$$

且计算结果表明差分格式也具有类似性质. 所以, 我们仅列出 $x=\dfrac{i\pi}{10}(i=1,2,3,4,5)$ 时的网格函数值. 其余从略.

参 考 文 献

1 ±Å½Î¶ . 抛物型方程的网格积分法. 袁兆鼎译. 北京: 科学出版社, 1963. 143～152

2 Miller J J H. On the location of zeros of certain classes of polynomials with application to numerical analysis. J. Inst. Math Appls, 1971, 8: 394～406

3 Richtmyer R D, Morton K W. Difference method for initial-value problems. 2nd ed. New York: Wiley, 1967. 38～183

Two New Classes of Steady Difference Schemes for Solving Four Order Parabolic Equation

Zeng Wenping

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract For solving four order parabolic equation $U_t+U_{xxxx}=0$, the author advances two new classes of three-layered implicit difference schemes, with $O(\Delta t^2+\Delta x^2)$ or $O(\Delta t^2+\Delta x^4)$ as respective local truncation error. When parameters are properly chosen, these schemes are absolutely stable and can be solved by speed-up method. They are shown by numerical examples to be effective.

Keywords four order parabolic equation, unconditionally stable, implicit difference scheme