第 18 卷　第 4 期　华侨大学学报(自然科学版)　Vol. 18　No. 4
1997 年 10 月　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　Oct. 1997

万有 Teichmüller 空间的度量收缩问题*

黄　心　中

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

摘要　研究由 Beltrami 系数诱导出来的解析函数的性质, 导出一个判别极值拟共形映照的必要条件和不具有退化叙列的充分条件. 改进了 Anderson 的一些结果, 并研究了万有 Teichmüller 空间内某些 Beltrami 直线在自然映照下的收缩问题.

关键词　极值拟共形映照, 退化叙列, Teichmüller 收缩原理
分类号　O 174.55

万有 Teichmüller 空间 $T(1)$ 可表示成所有单位圆的拟对称同胚群 QS 关于 Möbius 群 $PSL(2,R)$ 的商空间, 但是 QS 还包含一个比 $PSL(2,R)$ 更大的子群 S, 即单位圆的对称同胚群. 最近, Gardiner-Sullivan [1] 证明 QS mod S 仍然有一个自然复 Banach 流形结构和商度量 $\bar{d}$, 它仍被称为 QS mod S 上的 Teichmüller 度量.

设 $f(z)$ 是 $D=\{z\mid |z|<1\}$ 到自身上的拟共形映照, 满足 $f(0)=f(1)-1=0$, μ_f 是 $f(z)$ 的复特征, $k_f=\|\mu_f\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_{z\in D}|\mu_f|$, $k_0(f)=\inf_g k_g$. 这里 g 是 D 到 D 上任一拟共形映照, 满足 $g|_{\partial D}=f|_{\partial D}$. 称 $f(z)$ 是极值的, 若 $k_f=k_0(f)$, 这时对应的 μ_f 也被称为极值的. 注意到 $T(1)$ 中的度量可由极值拟共形映照的伸缩商来表示, $T(1)$ 中的两点间的距离可表示成 $d([f],[g])=\frac{1}{2}\log\frac{1+k_0(g\circ f^{-1})}{1-k_0(g\circ f^{-1})}$. 类似地, 记 $\bar{k}_f=\inf_U\{\operatorname*{ess\,sup}_{z\in U}|\mu_f(z)|\}$, 这里 U 是 D 内关于 ∂D 的任一邻域, $\bar{k}_f$ 被称为 $f(z)$ 的边界伸张. 令 $\bar{k}_0(f)=\inf_g \bar{k}_g$, 这里 $g(z)$ 是 D 到自身上与 $f(z)$ 有相同边界值的拟共形映照. 若 $\bar{k}_0(f)=\bar{k}_f$, 称 $f(z)$ 在 QS mod S 内为极值的, 则 QS mod S 中任意两点的距离为 $\bar{d}(\pi[f],\pi[g])=\frac{1}{2}\log\frac{1+\bar{k}_0(g\circ f^{-1})}{1-\bar{k}_0(g\circ f^{-1})}$.

对于给定的 Beltrami 系数 $\mu(z)$, 考虑曲线 $C_\mu=\{[f^t]\mid |t|<1\}$, 或 $\pi C_\mu=\{\pi[f^t]\mid |t|<1\}$, 这里 $\mu_{f^t}=t\frac{\mu}{\|\mu\|_\infty}$. 这种曲线称为 Beltrami 直线. 若 $\mu(z)$ 在 $T(1)$ 或 QS mod S 意义下为极值的, 则从 $(-1,1)$ 关于 Poincaré 度量 d_P 到 C_μ 或 πC_μ 关于相应的 Teichmüller 度量的自然映照 $I_\mu: t\to t\frac{\mu}{\|\mu\|_\infty}$ 是等距的. Teichmüller 收缩原理是: 若 I_μ 关于某两点的距离严格收缩, 那么在同一 Beltrami 直线上的任何两点都应严格收缩, 且收缩于一个给定的比例之内. 该性质被 Sullivan [2] 称为具有线圈的性态.

我们将研究下列的问题, 即对于什么样的点 $[f]\in T(1)$, 在自然投影 π 下, 从 $[0]$ 到 $[f]$ 的

---

*　本文 1997-02-24 收到; 国家教委留学生基金和福建省自然科学基金资助项目

距离是严格收缩的,即具有线圈性质.

1 主要定理及其证明

记 $B(D)=\{f(z) \mid f(z)$ 在 D 内解析, $\|f(z)\|_1=\frac{1}{\pi}\iint_D |f(z)|\,dx\,dy<\infty\}$,则 D 到自身上的拟共形映照 $f(z)$ 被称为是有限型的 Teichmüller 映照,若 $\mu_f=\|\mu(z)\|_\infty\frac{\overline{\varphi_0}}{|\varphi_0|}$,这里 $\varphi_0\in B(D)$. 即使是 (f) 中含有限型的 Teichmüller 映照,从 $[0]$ 到 $[f]$ 的距离在自然投影下都未必是收缩的,这可从 Reich 的例子[3]中看出. 另一方面,我们知道,设 $[f]\in T(1)$,且 $\bar{d}(0,[f])<d(0,[f])$,那么 $[f]$ 包含有一个有限型 Teichmüller 映照. 这就使上述问题更加复杂化,更引起许多学者的兴趣和探索[4].

本文由 Beltrami 系数 $\mu(z)$ 出发,诱导出一个解析函数. 通过研究该解析函数的某些性质,给出一个充分条件,判定它在自然投影下具有严格收缩的特性. 作为简单情形,还得出一个判别 $\mu(z)$ 为极值的必要条件,以及在 $\mu(z)$ 为极值的条件下,$\mu(z)$ 为有限型 Teichmüller 映照的复特征的充分条件. 这本身在 Teichmüller 空间理论中也是十分重要的.

设 $\kappa(z)\in L^\infty(D)=\{\kappa(z) \mid \kappa(z)$ 是 D 内有界可测函数,有范数 $\|\kappa(z)\|_\infty=\operatorname{ess\,sup}_{z\in D}|\kappa(z)|<\infty\}$,考虑泛函

$$L_\kappa(f(z))=\frac{1}{\pi}\iint_D \kappa(z)\,f(x)\,dx\,dy,\quad f(z)\in B(D),$$

则

$$\|L_\kappa(f(z)\|\le\|\kappa(z)\|_\infty.$$

Hamilton-Reich-Strebel[5]证明了下列的定理A.

定理A Beltrami系数 $\mu(z)$ 为极值的充要条件是下列之一成立,即

(1) 存在 $\varphi_0\in B(D)$,使 $\mu(z)=\|\mu(z)\|_\infty\frac{\overline{\varphi_0}}{|\varphi_0|}$,在 D 上几乎处处成立;

(2) 存在 D 内内闭一致收敛于 0 的叙列 $\{\varphi_n\}$,$\varphi_n\in B(D)$,使得 $\lim_{n\to\infty}L_\mu(\varphi_n)=\|L_\mu\|$ 成立. 这样的叙列 $\{\varphi_n\}$ 称为退化叙列.

对于给定的 Beltrami 系数 $\mu(z)$,令 $b_n=\frac{(n+2)}{\pi}\iint_D\mu(z)z^n\,dx\,dy$,$g(z)=\sum_{n=0}^\infty b_nz^n$,显然 $g(z)$ 是 D 内的解析函数,我们称 $g(z)$ 是由 $\mu(z)$ 诱导出来的解析函数. 我们将证明下列的定理1.

定理1 设 $\mu(z)\in L^\infty(D)$,$\|\mu(z)\|_\infty\le1$,则 $\mu(z)$ 为极值的必要条件是: $\sup_{z\in D}|g(z)|\ge2$ 成立,其中常数2是最佳的.

证明 由假设 $g(z)=\sum_{n=0}^\infty b_nz^n$,$b_n=\frac{(n+2)}{\pi}\iint_D\mu(z)z^n\,dx\,dy$,对于 $f(z)=\sum_{n=0}^\infty a_nz^n\in B(D)$,固定 $\rho(0<\rho<1)$,则

$$L_\mu(f(\rho z))=\sum_{n=0}^\infty a_n\rho^nL_\mu(z^n)=\sum_{n=0}^\infty\frac{a_nb_n}{n+2}\rho^n,$$

因为 $\|f(\rho z)-f(z)\|_1\to0$(当 $\rho\to1$ 时),因此有

$$L_\mu(f(z)) = \lim_{\rho\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n b_n}{n+2}\rho^n.$$

又因为对于固定的 $\rho(0<\rho<1)$，有 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})g(\rho e^{-i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n e^{in\theta})(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\rho^n e^{-in\theta})\,d\theta$ $=\sum_{n=0}^{\infty}a_n b_n r^n\rho^n$，两边同乘以 r，从0到1积分后可得 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 f(re^{i\theta})g(\rho e^{-i\theta})r\,dr\,d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n b_n}{n+2}\rho^n$.

令 $\rho\to 1^-$，则有

$$|L_\mu(f(z))| \le \frac{1}{2}\sup_{z\in D}|g(z)|\,\|f(z)\|_1,$$

因此 $\|L_\mu\| \le \frac{1}{2}\sup_{z\in D}|g(z)|$. 这样我们证明了：若 $\mu(z)$ 为极值拟共形映照的复特征，则 $\sup_{z\in D}|g(z)|\ge 2$. 下面的例子说明常数2是最佳的.

例 1　设 $\mu(z)=\bar{z}^m/|z|^m$，$z\in D$，m 为正整数. 我们知道，$\mu(z)$ 是极值的，这时

$$b_n = \frac{(n+2)}{\pi}\iint_D\frac{\bar{z}^m}{|z|^m}z^n\,dx\,dy = \begin{cases}2 & n=m,\\ 0 & n\ne m,\end{cases}$$

$g(z)=2z^n$. 显然，$\sup_{z\in D}|g(z)|=2$. 故定理1中的常数2是最佳的.

例 2　设 $h(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n$ 是 D 上任一有界解析函数，$M=\sup_{z\in D}|h(z)|<\infty$，取 $r_0>0$，$\frac{1}{2}\le r_0<1$，且令

$$\mu_{h,m}(z) = \begin{cases}\dfrac{h(z)}{M}, & |z|\le r_0,\\[2mm] \dfrac{\bar{z}^m}{|z|^m}, & r_0<|z|<1, \quad m \text{ 为正整数}.\end{cases}$$

这时，有

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{(n+2)}{\pi}\iint_D\mu_{h,m}(z)z^n\,dx\,dy \\ &= \frac{(n+2)}{\pi}\iint_{r_0<|z|<1}\frac{\bar{z}^m}{|z|^m}z^n\,dx\,dy = \begin{cases}2(1-r_0^{m+2}), n=m,\\ 0, n\ne m.\end{cases}\end{aligned}$$

$g(z)=2(1-r_0^{m+2})z^m$，我们有 $\sup_{z\in D}|g(z)|=2(1-r_0^{m+2})<2$. 由定理1可知，$\mu_{h,m}(z)$ 不是极值的.

但是，$\sup_{z\in D}(1-|z|^2)|(zg(z))'| = 4(1-r_0^{m+2})\frac{(m+1)}{(m+2)}(\frac{m}{m+2})^{\frac{m}{2}}$. 若取 $r_0=1/2$，则对所有的 m 都有 $\sup_{z\in D}(1-|z|^2)|(zg(z))'|\ge 7/2e>1$；若对取定的 r_0，$1/2<r_0<1$，因 $\lim_{m\to\infty}4(1-r_0^{m+2})\frac{(m+1)}{(m+2)}(\frac{m}{m+2})^{\frac{m}{2}}=4/e>1$，则对充分大的 m，有 $\sup_{z\in D}(1-|z|^2)|(zg(z))'|>1$ 成立. 可见，这是由 Anderson[6] 的定理1所无法判别的. 另一方面，Anderson 在文[6]证明了下列的

定理 B　设 $\mu(z)$ 是具有退化叙列的极值复特征，则 $\lim_{|z|\to 1}\sup(1-|z|^2)|(zg(z))'|\ge\|L_\mu\|$. 特别地，若记 $u=\xi+i\eta$，当下面条件满足时

$$(zg(z))' = \frac{2}{\pi}\iint_D\frac{\kappa(u)}{(1-uz)^3}d\xi\,d\eta = 0((1-|z|^2)^{-1}),\quad |z|\to 1^-,$$

则 $\mu(u)=\alpha\frac{\overline{\varphi(u)}}{|\varphi(u)|}$，$\varphi(u)\in B(D)$，$\alpha=\|\mu(z)\|_\infty$.

记 $\Sigma \subset T(1)$ 是这样元素的集合, $[f] \in \Sigma$, f 是有限型 Teichmüller 映照, 由其复特征 $\kappa(z)$ 所诱导出来的解析函数 $g(z)$ 满足: 存在 ρ_0, $0 < \rho_0 < 1$, 使得 $\sup\limits_{\rho_0 < |z| < 1} |(zg(z))'|(1 - |z|^2) < 1$. 我们将证明下列的定理 2 .

定理 2 对于每个 $[f] \in \Sigma$, 有 $\bar{d}(0, \pi[f]) < d(0, [f])$ 成立.

为了证明上述定理2, 我们需要下列引理1.

引理 1 设 $\mu(z) \in L^{\infty}(D)$, $\|\mu(z)\|_{\infty} \leq 1$, 由 $\mu(z)$ 所诱导出来的解析函数 $g(z)$ 满足: 存在 $0 < \rho_0 < 1$, 使得

$$\sup_{\rho_0 < |z| < 1} |G'(z)|(1 - |z|^2) = \sup_{\rho_0 < |z| < 1} |(zg(z))'|(1 - |z|^2) < 1,$$

则对 $\mu(z)$ 的每一列退化叙列 $\{\varphi_n\}$, 有 $\limsup\limits_{n \to \infty} \left|\iint_D \varphi_n(z)\mu(z)\,dx\,dy\right| < 1$.

证明 由 Anderson[6] 的式(3), 可得 $L_\mu(\varphi_n) = \lim\limits_{\zeta \to 1^-} \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \varphi_n(re^{i\theta}) G'(\zeta e^{-i\theta})(1 - r^2) r\,dr\,d\theta$.

因为

$$\left|\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \varphi_n(re^{i\theta}) G'(\zeta e^{-i\theta})(1 - r^2) r\,dr\,d\theta\right|$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \iint_{|z| \leq \rho_0} |\varphi_n(re^{i\theta})| r\,dr\,d\theta \sup_{|z| < 1} |G'(z)|(1 - |z|^2) + \sup_{\rho_0 < |z| < 1} |G'(z)|(1 - |z|^2) \|\varphi_n(z)\|_1;$$

又因 $\{\varphi_n\}$ 是退化叙列, 有 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \iint_{|z| \leq \rho_0} |\varphi_n(z)|\,dx\,dy = 0$. 根据 Anderson[6] 的定理1, $\sup\limits_{|z| < 1} |G'(z)|(1 - |z|^2) \leq 4$, 故有 $\limsup\limits_{n \to \infty} \left|\iint_D \varphi_n(z)\mu(z)\,dx\,dy\right| < 1$ 成立. 引理1证毕.

引理 2 设 $\mu(z)$ 满足引理1的条件, 若 $\mu(z)$ 是极值的, 则存在一个 $\varphi_0 \in B(D)$, 使得 $\mu(z) = \|\mu(z)\|_{\infty} \frac{\overline{\varphi_0}}{|\varphi_0|}$ 在 D 中几乎处处成立, 且对 $\mu(z)$ 不存在退化叙列.

证明 根据定理 A, 对这样的 $\mu(z)$, 必然有 $\varphi_0 \in B(D)$, 使 $\mu(z) = \|\mu(z)\|_{\infty} \frac{\overline{\varphi_0}}{|\varphi_0|}$ 在 D 中几乎处处成立. 再由引理 1 可知, 对 $\mu(z)$ 的退化叙列是不存在的. 引理 2 证毕.

下面证明定理2. 若 $[f] \in \Sigma$, 则由引理1可得 $\bar{k}_0(f) < k_0(f)$. 因为若 $\bar{k}_0(f) = k_0(f)$, 则有 $\|\mu(z)\|_{\infty} = k_0(f) = \bar{k}_0(f)$, 这里 $\mu(z)$ 是 f 的复特征. 由下列 Gardiner[7] 的定理 B, 即

定理 B 对每个 $[f] \in T(1)$, $\bar{k}_f = \bar{k}_0(f)$ 的充分必要条件为 $\sup\limits_{\{\varphi_n\}} \limsup\limits_{n \to \infty} \mathrm{Re} \iint_D \varphi_n \mu(z)\,dx\,dy = \bar{k}_f$ 成立, 这里上确界取自于 $B(D)$ 中关于 $\mu(z)$ 的所有退化叙列.

我们得到, 对 $\mu(z)$ 的所有退化叙列 $\{\varphi_n\}$, 有

$$\sup_{\{\varphi_n\}} \limsup_{n \to \infty} \mathrm{Re} \iint_D \varphi_n \mu(z)\,dx\,dy = \|\mu(z)\|_{\infty}.$$

根据对角线原理, 可找到一串 $B(D)$ 中的退化叙列, 使

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{Re} \iint_D \varphi_n \mu(z)\,dx\,dy = \|\mu(z)\|_{\infty},$$

这与上述引理1是矛盾的. 从而有 $\bar{k}_0(f) < k_0(f)$ 成立. 根据定义, 这等价于 $\bar{d}(0, \pi[f]) < d(0,$

$[f])$. 定理 2 证毕.

根据下列 Teichm ller 收缩原理[7], 即

Teichm ller 收缩原理　设 $\|\mu(z)\|_\infty = 1, 0< k_1< k_2< 1, d(0,[f^{k_1}]) \le \lambda_1 d_p(0, k_1)$ 或 $\bar{d}(0, \pi([f^{k_1}])) \le \lambda_1 d_p(0, k_1)$, 对某 $\lambda_1< 1$成立, 这里 f^k 表示以 $\mu_k= k\mu(z)$ 为复特征从 D 到自身上的拟共形映照($k< 1$), 则存在仅依赖于 k_1, k_2 和 λ_1 的常数 $\lambda_2< 1$, 使得

$$d(0,[f^k]) \le \lambda_2 d_p(0,k) \text{ 或 } \bar{d}(0,\pi[f^k]) \le \lambda_2 d_p(0,k)$$

对所有的$0\le k\le k_2$成立.

我们可得到下面的推论 1 .

推论 1　在定理2的条件下, 令 $\lambda= \bar{d}(0,\pi[f])/d(0,[f])$, $k= \|\mu_f\|_\infty$, 固定 $k'< 1$, 设 f^t 是 D 到自身上的拟共形映照, 以 $\mu_{f^t}= \frac{t}{k}\mu_f(z)$ 为复特征, $t\in[0,k')$, 则存在一个仅与 k, k' 和 λ 有关的常数 $\lambda'< 1$, 使得 $\bar{d}(0,\pi[f^t]) \le \lambda' d_p(0,t)$ 对每个 $t\in[0,k']$ 成立, 其中 d_p 表示单位园盘上的 Poincar 度量.

证明　根据定理2, 我们有 $\lambda= \bar{d}(0,\pi[f])/d(0,[f])< 1$, 再根据上述的 Teichm ller 收缩原理, 推论 1 可得.

参　考　文　献

1 Gardiner F P, Sullivan D. Symmetric and quasisymmetric structures on a closed curve. Amer. J. Math., 1992, 114: 683～736

2 Sullivan D. Bounds, quadratic differential, and renormalization conjectures. Amer. Math. Soc. Centennial Publication, 1991, (2): 417～466

3 Reich E. An extremum problem for analytic functions with area norm. Ann. Acad. Sci. Fenn., 1976, (2): 429～445

4 Huang Xinzhong, Taniguchi M. On the contraction of the Teichm ller metrics. J. Math. Kyoto Univ., 1995, 35: 133～142

5 Reich E, Strebel K. Extremal quasiconformal mappings with given boundary values. Contributions to Analysis. New York: Academic Press, 1974. 375～391

6 Anderson J M. The extremum problem for analytic functions with finite area integral. Comment. Math. Helv., 1980, 55: 87～96

7 Gardiner F P. On Teichm ller contraction. Proc. Amer. Math. Soc., 1993, 118: 865～875

Metric Contraction of Universal Teichm ller Space

Huang Xinzhong

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract　Considering the property of analytic function induced from Beltrami coefficient, the author derives a necessary condition for extremal quasiconformal mapping and a sufficient condition for the nonexistence of degenerating sequence. Some results of Anderson are thus improved. The study centers also on the contraction of some Beltrami lines in universal Teichm ller space under natural mapping.

Keywords　extremal quasiconformal mapping, degenerating sequence, principle of Teichm ller contraction