第 18 卷 第 3 期　　华侨大学学报（自然科学版）　　Vol. 18 No. 3
1997 年 7 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jul. 1997

关于定常线性系统最优调节器的逆问题*

龚 德 恩

（华侨大学工商管理系，泉州 362011）

摘要　讨论连续定常线性系统最优调节器的逆问题，得到一种求加权矩阵 Q 和 R 的简便方法．

关键词　线性系统，最优调节器，逆问题

分类号　O 231

给定连续定常线性系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1}$$

和二次性能指标

$$J(u) = \int_0^\infty [x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)]\mathrm{d}t, \tag{2}$$

其中状态向量 $x(t)\in R^n$，控制向量 $u(t)\in R^m$；A,B,Q 和 R 为适当维数的常数矩阵，且 $Q=Q^{\mathrm{T}}>0$（或 $\geqslant 0$），$R=R^{\mathrm{T}}>0$.

最优控制问题是求反馈控制律

$$u = -Kx, \tag{3}$$

使二次性能指标(2)达到极小值．

已经证明[1]，若 (A,B) 为能控（或能稳定）对，(A,C) 为能观测（或能检测）对（此处设 $Q=C^{\mathrm{T}}C$），则式(3)中反馈增益矩阵 K 由下式确定，即

$$K = R^{-1}B^{\mathrm{T}}P, \tag{4}$$

其中 矩阵 $P=P^{\mathrm{T}}>0$（或 $\geqslant 0$），为矩阵 Riccati 代数方程

$$A^{\mathrm{T}}P + PA - PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P + Q = 0 \tag{5}$$

的解．

由式(3)～(5)确定的控制律 $u(x)$ 称为线性二次型问题(1)和(2)的最优调节器．最优调节器是在加权矩阵 Q 和 R 已知的条件下得到的．显然，Q 和 R 的选取对闭环系统

$$\dot{x} = A_c x, \tag{6a}$$

$$A_c = A - BK = A - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P \tag{6b}$$

的动态特性会产生影响．因此，当对闭环系统的动态特性提出一定要求时，如何选取加权矩阵 Q 和 R，将是一个很有实际意义的问题，称为最优调节器的逆问题或反问题．文[2,3]对单输

* 本文 1997-01-15 收到；福建省自然科学基金资助项目

入系统的逆问题进行过研究．本文介绍一种确定加权矩阵 Q 和 R 的简便方法,该法对单输入和多输入系统均适用．

1 问题的分析

注意到(4)和(5)两个矩阵方程中共有六个矩阵,其中矩阵 A 和 B 是已知的,还有 P,Q,R 和 K 四个矩阵要由方程(4)和(5)确定,并要求 $P=P^{\mathrm{T}}>0$(或$\geqslant 0$),$Q=Q^{\mathrm{T}}>0$(或$\geqslant 0$),$R=R^{\mathrm{T}}>0$. 最优调节器的设计是在 Q 和 R 已知的条件下,由式(5)确定矩阵 P,然后再由式(4)确定矩阵 K;而逆问题是要确定矩阵 Q 和 R,使闭环系统具有要求的动态特性．因此,对逆问题而言,可根据对闭环系统提出的动态特性要求,先确定矩阵 K,然后再寻求由式(4),(5)确定矩阵 P,Q,R 的途径．本文正是从这种分析出发,提出一种在 K 矩阵已给定的条件下,先选取 P,然后再确定 Q 和 R 的简便方法．

2 确定矩阵 Q 和 R 的方法

将式(4)代入式(5),可得

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + Q = PBK. \tag{7}$$

上式左边为对称矩阵,右边也应为对称矩阵,故有条件

$$PBK = K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P,\ P = P^{\mathrm{T}}. \tag{8}$$

因此,若能由求解式(8)得到 P,则 Q 和 R 可由式(7)和式(4)确定．为此,我们有如下定理．

定理 1　若矩阵 A,B 和 K 已给定,则矩阵方程组(8)有无穷多个非零解．

证　注意到式(8)是以矩阵 P 的元素为未知量的齐次线性方程组,且方程的个数为 $\frac{1}{2}n(n-1)$,未知量的个数为 $\frac{1}{2}n(n+1)$,未知量的个数比方程的个数多 n 个．因此,由线性方程组理论可知,式(8)存在无穷多个非零解．

定理 2　若 P 为式(8)的非零解,KK^{T}非奇异,则矩阵 Q 和 R 由下式确定,即

$$Q = PBK - (A^{\mathrm{T}}P + PA), \tag{9}$$

$$R = B^{\mathrm{T}}PK^{\mathrm{T}}(KK^{\mathrm{T}})^{-1}, \tag{10}$$

且如此求得的 Q 和 R 为对称矩阵．

证　由式(7)即得式(9). 因 P 是式(8)的非零解,故由式(7)知 Q 为对称矩阵．

由式(4)有 $RK=B^{\mathrm{T}}P$,将此式右乘 K^{T},则由 KK^{T}非奇异可得式(10). 再将此式左乘 K^{T},得

$$K^{\mathrm{T}}RK = K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P,$$

上式中,因 P 为式(8)的非零解,故其右边为对称矩阵,因而 R 也为对称矩阵．

设(A,B)为能控对,由定理 1 和定理 2,可得选取矩阵 Q 和 R 的步骤．

(1) 按极点配置方法[1],选取矩阵 K,使闭环系统式(6)具有事先指定的极点$\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$,并适当选取$\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$,使 KK^{T}非奇异．

(2) 将 A,B 和步骤(1)中求得的 K 代入方程(8),求得矩阵 P,此时矩阵 P 中至少有 n 个元素是待定的．

(3) 将 A,B 和已求得的 K,P 代入式(9),(10),求出矩阵 Q 和 R.

(4) 上面求得的矩阵 P,Q 和 R 不一定是正定或正半定矩阵,这时还须适当选取 P 中待定的元素,使 $P>0$(或 $P\geqslant 0$),$Q>0$(或 $Q\geqslant 0$),$R>0$.

3 举例

例 1 给定二阶系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}3 & 5\\0 & 2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u,$$

该系统是完全能控的,但开环系统不稳定,其开环极点为{2,3}.

设希望的闭环极点为{−2,−4},求矩阵 Q 和 R.

(1) 不难直接求得反馈增益矩阵为

$$K=[7,11],\quad KK^{\mathrm{T}}=170\neq 0.$$

(2) 将 A,B 和 K 代入式(9),解得

$$P=\begin{bmatrix}p_{11} & \frac{7}{11}p_{22}\\ \frac{7}{11}p_{22} & p_{22}\end{bmatrix}.$$

(3) 将 A,B 和,P 代入式(9)和式(10),得

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{49}{11}p_{22}-6p_{11} & \frac{42}{11}p_{22}-5p_{11}\\ \frac{42}{11}p_{22}-5p_{11} & \frac{7}{11}p_{22}\end{bmatrix},\quad R=\frac{1}{11}p_{22}.$$

(4)为使 P,Q 和 R 为正定矩阵,应适当选取 p_{11},p_{22}. 由正定性判别定理[4],可知 $P>0$,$Q>0$ 和 $R>0$ 时,p_{11},p_{22} 应满足的条件是

$$p_{11}>0,\quad 1.35p_{11}<p_{22}<1.71p_{11}.$$

例如,若取 $p_{22}=1.54p_{11}$,$p_{11}>0$,则有

$$P=\begin{bmatrix}p_{11} & 0.98p_{11}\\0.98p_{11} & 1.54p_{11}\end{bmatrix}>0,\ Q=\begin{bmatrix}0.86p_{11} & 0.88p_{11}\\0.88p_{11} & 0.98p_{11}\end{bmatrix}>0,\ R=0.14p_{11}>0.$$

例 2 给定如下三阶系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}u,$$

该系统是完全能控的,但不稳定,其开环系统极点为 $\{1,\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\}$.

设希望的闭环系统极点为{−1,−2,−3},求矩阵 Q 和 R.

(1) 不难求得反馈增益矩阵为

$$K=[51,-24,32],\ KK^{\mathrm{T}}=4201\neq 0.$$

(2) 将 A,B 和步骤(1)中求得的 K 代入式(8),解得

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \frac{51}{56}(p_{33}-p_{22})-p_{12} \\ p_{12} & p_{22} & -\frac{3}{7}p_{33}-\frac{4}{7}p_{22} \\ \frac{51}{56}(p_{33}-p_{22})-p_{12} & -\frac{3}{7}p_{33}-\frac{4}{7}p_{22} & p_{33} \end{bmatrix}.$$

(3) 将 A,B 和上面求得的 K,P 代入式(9),(10),得

$$Q=\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix},\quad R=\frac{1}{56}(p_{33}-p_{22}),$$

其中 $q_{11}=\frac{357}{8}(p_{33}-p_{22})-2p_{11}+2p_{12}$;$q_{22}=\frac{1}{7}(72p_{33}-86p_{22})$;$q_{33}=\frac{461}{28}(p_{33}-p_{22})+2p_{12}$;$q_{12}=\frac{1}{7}(157p_{22}-150p_{33})-2p_{12}$;$q_{13}=\frac{1}{56}(1525p_{33}-1581p_{22})-p_{11}+p_{12}$;$q_{23}=\frac{1}{7}(100p_{22}-93p_{33})-p_{12}$.

(4)为使 $P>0$,$Q>0$,$R>0$,应适当选取 p_{11},p_{22},p_{33} 和 p_{12} 四个待定参数.例如,若设 $q_{13}=0$,$q_{23}=0$,则有

$$p_{11}=\frac{781}{56}(p_{33}-p_{22}),p_{12}=\frac{1}{7}(100p_{22}-93p_{33}).$$

于是,矩阵 P 和 Q 化为

$$P=\begin{bmatrix} \frac{781}{56}(p_{33}-p_{22}) & \frac{1}{7}(100p_{22}-93p_{33}) & \frac{1}{56}(795p_{33}-851p_{22}) \\ \frac{1}{7}(100p_{22}-93p_{33}) & p_{22} & -\frac{1}{7}(4p_{22}+3p_{33}) \\ \frac{1}{56}(795p_{33}-851p_{22}) & -\frac{1}{7}(4p_{22}+3p_{33}) & p_{33} \end{bmatrix},$$

$$Q=\begin{bmatrix} \frac{1}{56}(663p_{22}-551p_{33}) & \frac{1}{7}(36p_{33}-43p_{22}) & 0 \\ \frac{1}{7}(36p_{33}-43p_{22}) & \frac{1}{7}(72p_{33}-86p_{22}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{28}(339p_{22}-283p_{33}) \end{bmatrix}.$$

此时,不难验证,$P>0$,$Q>0$ 和 $R>0$,p_{22} 和 p_{33} 应满足的条件是

$$p_{22}>0,\quad 1.194\,5p_{22}<p_{33}<1.197\,9p_{22}.$$

若再设 $p_{33}=1.196p_{22}$,$p_{22}>0$,则有

$$P=\begin{bmatrix} 2.733\,5p_{22} & -1.604p_{22} & 1.782\,5p_{22} \\ -1.604p_{22} & p_{22} & -1.084p_{22} \\ 1.7825p_{22} & -1.084p_{22} & 1.196p_{22} \end{bmatrix}>0,$$

$$Q=\begin{bmatrix} 0.071\,5p_{22} & 0.008p_{22} & 0 \\ 0.008p_{22} & 0.016p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0.019p_{22} \end{bmatrix}>0,$$

$$R = 0.003\,5 p_{22} > 0.$$

特别地,取 $p_{22}=280$,可得

$$P = \begin{bmatrix} 765.38 & -449.12 & 499.1 \\ -449.12 & 280 & -310.352 \\ 499.1 & -310.352 & 334.88 \end{bmatrix} > 0,$$

$$Q = \begin{bmatrix} 20.02 & 2.24 & 0 \\ 2.24 & 4.48 & 0 \\ 0 & 0 & 5.32 \end{bmatrix} > 0,$$

$$R = 0.98 > 0.$$

4 结束语

本文对连续定常线性系统最优调节器的逆问题,给出了一种选取加权矩阵 Q 和 R 的简便方法.其优点是,反馈增益矩阵 K 按极点配置方法确定,使闭环系统具有要求的动态特性;加权矩阵 Q 和 R 的选取只须进行简单的代数运算,避免了最优调节器设计中求解代数 Riccati 方程的麻烦.而且由于矩阵 P 含有未定元素,使矩阵 Q 和 R 的选取具有一定的灵活性.

另外,如果加权矩阵 R 给定,上述方法仍适用.只须将确定 R 的式(10)改为新增加的条件 $PBK=K^{\mathrm{T}}RK$ 即可.

参 考 文 献

1 王恩平,秦化淑,王世林.线性控制系统理论引论.广州:广东科技出版社,1991.353~359,235~242

2 王永初.系统的分散与集中决策(IV)控制目标函数的实现.华侨大学学报(自然科学版),1995,17(2):179~185

3 何关钰.线性控制系统理论.沈阳:辽宁人民出版社,1982.628~637

4 韩京清,何关钰,许可康.线性系统理论代数基础.沈阳:辽宁科学技术出版社,1987.433~440

Inverse Problem of the Optimum Regulator for a Time-Invariant Linear System

Gong Deen

(Dept. of Indus. & Com. Manag., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract A discussion is made on the inverse problem of the optimum regulator for a time-invariant linear system. For solving weighting matrice Q and R, a handy method is obtained.

Keywords linear system, optimum regulator, inverse problem