第18卷 第3期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 18 No. 3
1997年7月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jul. 1997

自适应预测压缩*

刘 强 生

(华侨大学电子工程系，泉州 362011)

摘要 介绍一种应用自适应滤波理论及位图法对数据进行压缩的方法,并以此法用C语言编制压缩及解压程序．经过测试,对于相关性较大的序列,自适应预测压缩的效果明显优于通用压缩程序 ARJ.

关键词 维纳滤波,自适应滤波,位图

分类号 TN 911.72

由信号的取样值构成的信号序列中样值间存在着相关性,我们若能利用数据间的相关性,用统计学的方法对数据进行预测,即可减小差值信号的方差,从而也就能够减小量化误差或降低数码率．维纳滤波理论是解决最佳滤波和预测的方法.设计维纳滤波器需要知道信号和噪声的相关函数,同时它要求信源是平稳的,这些都限制了它的应用．自适应滤波器与维纳滤波器一样都是以最小均方误差为准则的最佳滤波器．自适应滤波器实际上是能自动调节本身的单位样本响应 $h(n)$ 特性以达到最优化的维纳滤波器．设计自适应滤波器可以不必要求预先知道信号与噪声的自相关函数,而且在滤波过程中信号与噪声的自相关函数即使随时间作慢变化它也能自动适应,自动调节到满足最小均方误差的要求．以下将讨论如何用自适应滤波理论进行数据预测．

1 自适应预测器

1.1 基本原理

自适应预测器(图1)利用横向结构的FIR滤波器形式来实现自适应预测.

若预测器的长度为 n,由图1可以得到

$$y(j) = \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}(j) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(j)\boldsymbol{W}, \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{W}=[w_1,w_2,\cdots,w_n]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{X}(j)=[x_1(j), x_2(j), \cdots, x_n(j)]^{\mathrm{T}}$.

由于我们的目的是根据过去 n 个输入值来预测现在的输入值,因此所提供的期望输出响应 $d(j)$ 为 $x(j+1)$. 输出信号 $y(j)$ 与期望响应 $d(j)$ 相比较,得误差信号

$$e(j) = d(j) - y(j) = d(j) - \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}(j) = d(j) - \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(j)\boldsymbol{W}, \tag{2}$$

误差信号被用来作为图1中权系数调节器的输入信号,通过调节权系数,使均方误差 $E[e^2(j)]$

---

* 本文1997-01-14收到；国务院侨办重点学科科研基金资助项目

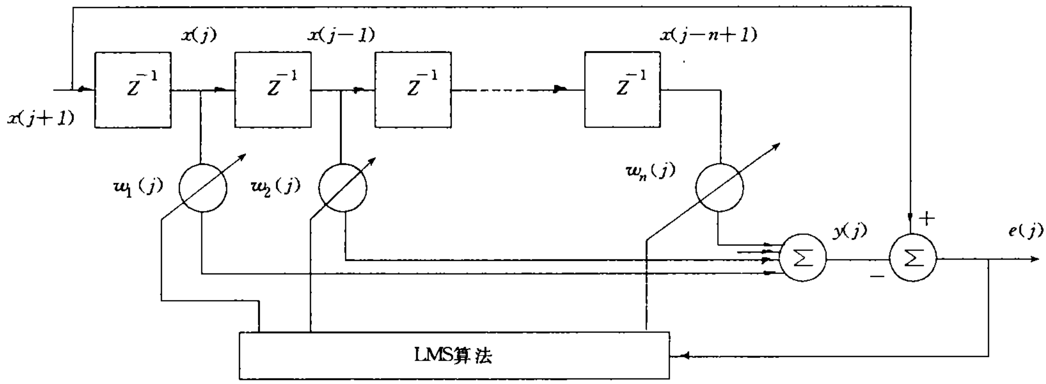

图1　自适应预测器

为最小．由式(2)得误差的平方为

$$e^2(j) = d^2(j) - 2\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(j)\boldsymbol{W}d(j) + \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}(j)\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(j)\boldsymbol{W}. \tag{3}$$

对上式两边取数学期望，得均方误差

$$E[e^2(j)] = E[d^2(j)] - 2E[\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(j)d(j)]\boldsymbol{W} + \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}E[\boldsymbol{X}(j)\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(j)]\boldsymbol{W}, \tag{4}$$

令 $\boldsymbol{X}(j)$与期望响应 $d(j)$的互相关为

$$\boldsymbol{P}_{xd} = E[\boldsymbol{X}(j)d(j)], \tag{5}$$

输入信号的自相关阵为

$$R_{xx} = E[\boldsymbol{X}(j)\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(j)], \tag{6}$$

将式(5)，(6)代入式(4)中得

$$E[e^2(j)] = E[d^2(j)] - 2\boldsymbol{P}_{xd}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W} + \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}R_{xx}\boldsymbol{W}. \tag{7}$$

可见均方误差是权系数的二次函数，这是一个中间下凹的超抛物形曲面，是具有唯一最小值的函数．调节权系数使均方误差最小，相当于沿超抛物形曲面下降找最小值，我们对式(7)中的权系数求导，得均方误差函数的梯度为

$$\nabla(j) = \nabla E[e^2(j)] = -2\boldsymbol{P}_{xd} + 2R_{xx}\boldsymbol{W}, \tag{8}$$

令上式等于零，得最佳权系数矢量

$$\boldsymbol{W}_0 = R_{xx}^{-1}\boldsymbol{P}_{xd}, \tag{9}$$

此式为维纳滤波的维纳-霍夫方程．将式(9)代入式(7)可得最小均方误差为

$$E[e^2(j)]_{\min} = E[d^2(j)] - \boldsymbol{P}_{xd}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0. \tag{10}$$

1.2　最小均方算法[1,2]

由上寻求最佳权系数矢量就必须求解维纳-霍夫方程，但这需要 R_{xx}和 P_{xd}的先验统计知识，在这些知识无法预先知道时，只能寻求近似解．最小均方(LMS)算法是一种很有效的算法，它根据非线性规划中的最快下降法，使权值沿误差函数的负梯度方向改变．因此，“下一时刻”的权系数矢量应等于“现时刻”的权系数矢量 $\boldsymbol{W}(j)$加上一项比例于负的均方函数的梯度 $\nabla(j)$，即

$$\boldsymbol{W}(j+1) = \boldsymbol{W}(j) - \mu\nabla(j), \tag{11}$$

μ 是一个控制收敛速度和稳定性的参数，称为自适应常数．

为了便于用实时系统实现，取单个误差样本的平方 $e^2(j)$作为均方误差 $E[e^2(j)]$的估计，

于是

$$\nabla(j)=\nabla[e^2(j)]=2e(j)\nabla[e(j)], \tag{12}$$

由式(2)有

$$\nabla[e(j)]=\nabla[d(j)-\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}(j)]=-\boldsymbol{X}(j). \tag{13}$$

将式(13)代入式(12)式,得梯度估计

$$\nabla(j)=-2e(j)\boldsymbol{X}(j), \tag{14}$$

由于

$$\begin{aligned}E[\nabla(j)]&=E[-2e(j)\boldsymbol{X}(j)]=-2E\boldsymbol{X}(j)[d(j)-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(j)\boldsymbol{W}(j)]\\&=-2[P_{xd}-R_{xx}\boldsymbol{W}(j)]=E[\nabla e^2(j)]=\nabla(j),\end{aligned} \tag{15}$$

因此式(14)的梯度估计是无偏的．使用式(14)的梯度估计公式,则权系数矢量的迭代公式变为

$$\boldsymbol{W}(j+1)=\boldsymbol{W}(j)+2\mu e(j)\boldsymbol{X}(j). \tag{16}$$

1.3　讨论

不妨设输入数据为零均值,由式(10)得

$$E[e^2(j)]_{\min}=E[d^2(j)]-\boldsymbol{P}_{xd}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0,$$

又因为提供的期望输出响应 $d(j)$ 为 $x(j+1)$,将式(5)代入式(10)得

$$\begin{aligned}E[e^2(j)]_{\min}=&E[x^2(j+1)]-E[x(j)x(j+1),x(j-1)x(j\\&+1),\cdots,x(j-N+1)x(j+1)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_0.\end{aligned}$$

因为 $E[x(j-i+1)x(j+1)]=R(i)$, $\boldsymbol{W}_0=[w_1,w_2,\cdots,w_n]^{\mathrm{T}}$,代入上式得

$$E[e^2(j)]_{\min}=R(0)-\sum_{i=1}^{n}w_iR(i), \tag{17}$$

所以,只要原始输入信号不是白噪声,其数据经过自适应预测器后,所输出的误差信号的方差 $E[e^2(j)]_{\min}$ 就会小于输入数据的方差 $R(0)$,甚至有 $E[e^2(j)]_{\min}\ll R(0)$. 这就是说,误差序列 $e(j)$ 的方差与信号序列 $x(j)$ 相比,总是要小些,甚至可以小很多;而误差序列 $e(j)$ 的相关性,比起原始信号序列 $x(j)$ 的相关性要弱一些,甚至可能弱很多. 传送已经去除了大部分相关性的误差序列 $e(j)$ 有利于数据压缩,各样本间的相关性越大,差值 $e(j)$ 的方差就越小,所能达到的压缩比就越大;反之,若 $x(j)$ 前后样本间互不相关,即 $R(i)=0$(当 $i\neq0$),则此时 $E[e^2(j)]_{\min}=R(0)$,不能压缩．

2　预测编码器

预测编码器由自适应预测器和编码器构成,如图2所示．前面已经介绍了自适应预测器,以下介绍编码器．

我们已经知道,若信号间的相关性较大,信号经自适应预测器后得到的误差序列 $e(j)$ 的方差较小,因此能够用比 $x(j)$ 少得多的位数对 $e(j)$ 进行编码[3]. 若自适应预测器能很好的跟踪 $x(j)$,那么 $e(j)$ 中将会含有较多数量的0码,去除这些0码,会得到更大的压缩比．

为了表征这些0码在误差序列 $e(j)$ 中的位置,最简单的办法是用1位2进制"1"代表非0的误差 e_r 的位置,以1位2进制"0"代表0码的位置．传送时我们对误差序列确定一个长度,比如以 N 位作为一帧,则它代表了全部的位置信息,从而在接收端可以准确的恢复出0与 e_r.

由于计算机常以 8 bit 作为一个单元（即一个字节），因此方便的办法是规定 8 位为一帧，然后用一个字节来代表位置信息或 0 与 e_r 的分布情况，该字节所代表的二进制序列就叫作位图（BIT MAP），其数据结构如图 3 所示，r 为位图 BM 中“1”的个数[4].

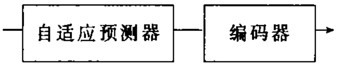

图2　预测编码器

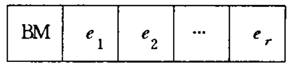

图3　位图法数据结构

3　程序 PAD

译码器的过程与编码器的过程刚好相反，如图 4 所示．我们这里不在叙述．

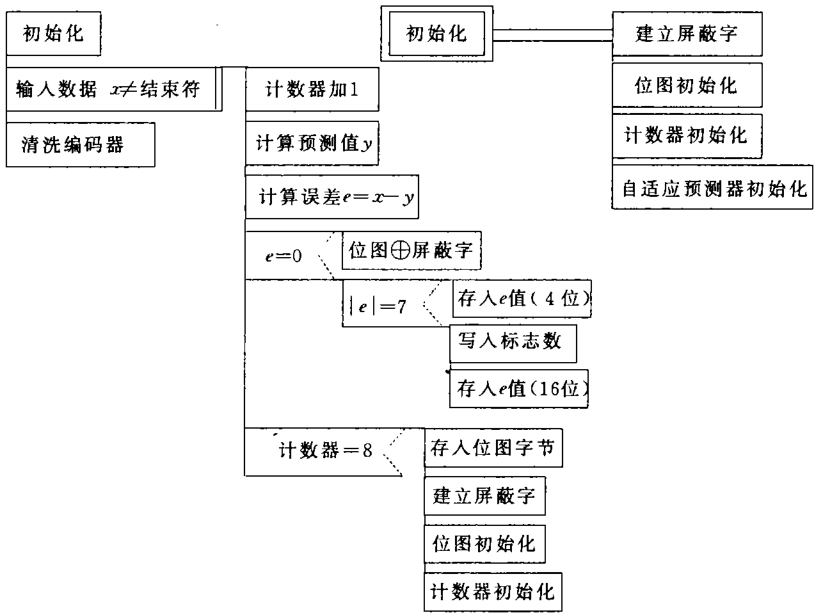

图4　编码程序PAD

4　实验结果与讨论

由于自适应预测压缩用过去 n 个信号值的线性组合来预测实际的输入值，因此压缩的效果与所要压缩的数据的相关性密切相关，数据间的相关性越大，压缩比越大. 这里相关性表明序列间的前后联系，按一般自相关序列的定义为[2]

$$v(l) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k)x(l+k), \tag{18}$$

我们认为式（18）能近似反映出数据间的相关性．

另外，压缩效果也与 n 的取值有关，n 并非越大越好. 例如，若输入序列为一阶马尔可夫序列，对于 $n=1$ 及 $n=2$，由式（17）可推知其预测表达式完全相同，因此取 $n=1$ 已经足够了，再加大 n 其结果一样．此外 n 值会影响压缩的速率，n 值越大压缩速率越慢．

本文所介绍的自适应预测压缩程序及译码程序均用 C 语言实现，数据经压缩后能无损复原．以下我们用 3 组数据对此压缩程序进行测试，如附表所示，表中所列数据为对不同 n 值的

压缩情况，并与通用压缩程序 ARJ 进行比较．第1组数据为递增序列取1～1 000的自然数，

附表 压缩结果表

文件类型	原长	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=5$	ARJ
数据文件1	2 000	73	71	78	86	1 635
数据文件2	2 000	2 288	672	797	1 468	1 831
数据文件3	2 000	3 332	3 322	3 329	3 332	2 100

在存储器中占2 000个字节；第2组数据为慢变序列用函数

$$y = 100 \times [5\sin(0.05 \times 2\pi x/40) + 12\sin(0.7 \times 2\pi x/40)],$$

x 从1～1 000对 y 取整后生成的，占2 000个字节，第3组为随机整数序列，范围在－50 000～50 000间，占2 000个字节．为便于比较，我们将以上3组数据归一化，归一化公式为

$$y(i) = [x(i) - \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}]/(x_{\max} - x_{\min}). \tag{19}$$

然后，再按式(18)计算它们的相关性，可以得出第1组数据的相关性略大于第2组数据的相关性，这两组数据的相关性都远远大于第3组数据．

从上表我们可看出，对于相关性较大的序列，自适应预测压缩的效果明显优于 ARJ，但对于相关性很弱甚至无关的序列，则压缩效果很差．因此在数据采集系统中应用自适应预测压缩程序，将能节省许多宝贵的存储空间．

本文承戴再平老师悉心指导，在此表示感谢．

参 考 文 献

1 王宏禹．随机数字信号处理．北京：科学出版社，1986．386～400
2 吴兆熊．数字信号处理(下)．北京：国防工业出版社，1985．12，52～62
3 吴乐南．数据压缩的原理与应用．北京：电子工业出版社，1995．113～120
4 戴善荣．数据压缩．西安：西安电子科技大学出版社，1990．12，202～204

Adaptive and Predictive Data Compression

Liu Qiangsheng

(Dept. of Electron. Eng.. Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract Adaptive filter theory and bit map method are applied to data compression; and the method is applied to programming of compression and its decoding in C language. As shown by the tests, the effect of adaptive and predictive compression is much better than that of conventional compression ARJ for the sequences with greater correlation.

Keywords Wiener filter, adaptive filter, bit map