

运筹学分配问题的新解法及其 算法设计和程序实现*

张 银 明

(华侨大学电子工程系, 泉州 362011)

摘要 介绍一个全新途径研究的方法——元素判别值分配法及其算法设计和程序实现. 它的分配过程简便, 且一次分配即可获得最优方案.

关键词 运筹学, 分配问题, 元素判别值分配法

分类号 O 22

运筹学中的分配问题或称指派问题是众多学者感到兴趣的问题. 几乎每本运筹学的有关书中都对它进行了讨论, 但至今仍离不开匈牙利法及其改进的求解方法^[1]. 这种方法是有效的, 也是麻烦的. 近几年来, 作者从另一个全新的途径研究该类问题的求解方法, 这就是“元素判别值分配法”. 利用元素判别值来权衡一个元素能够得到指派的权值有多大, 从而使得分配变得极为简便, 并一次分配即可获得最佳方案. 它无须反复检验和迭代, 不但可用于求解资源和活动数目相同的分配问题, 而且可用于求解资源为 n 、活动为 m ($n \neq m$) 的分配问题, 因而使这个方法具有独特的创新性. 元素判别值分配法的有关概念和分配原则可参看文[2]. 本文主要介绍它对分配问题的求解方法、算法设计及其程序实现.

1 匈牙利求解算法

分配问题一般可描述为: 有 m 项任务(或资源)分配给 m 个人(或活动)去完成. 假设

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{表示指派第 } i \text{ 个人承担第 } j \text{ 项任务;} \\ 0, & \text{表示不指派第 } i \text{ 个人承担第 } j \text{ 项任务,} \end{cases}$$

而 C_{ij} 表示指派第 i 个人去完成第 j 项任务的时间(或效率、成本), 则矩阵 (C_{ij}) 称为系数矩阵(或效能矩阵). 这样, 分配问题可归结成下面的数学模型

$$\begin{aligned} \min(\max) Z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m C_{ij} \cdot X_{ij}, \\ \text{S. T. } \sum_{i=1}^m X_{ij} &= 1 \quad (j = 1, \dots, m); \quad \sum_{j=1}^m X_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, m), \\ X_{ij} &= 0 \text{ 或 } 1 \quad (i, j = 1, \dots, m), \end{aligned}$$

该问题的分配表如图 1 所示.

* 本文 1996-12-23 收到

任务 活动	B_1		B_2		\dots		B_m		活动量
A_1	C_{11}	X_{11}	C_{12}	X_{12}		\dots	C_{1m}	X_{1m}	1
A_2	C_{21}	X_{21}	C_{22}	X_{22}		\dots	C_{2m}	X_{2m}	1
\vdots						\dots			\vdots
A_m	C_{m1}	X_{m1}	C_{m2}	X_{m2}			C_{mm}	X_{mm}	1
任务量	1		1		\dots		1		m

图 1 运筹学一般分配问题分配图

此类问题使用匈牙利方法^[1,3]的基本思想是使总效能矩阵最小,以求得最优解.下面,简述其算法.

(1) 取 $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $J = \{1, 2, \dots, m\}$; 如果目标为 $\max Z$, 则 $C_{ij} = -C_{ij}$, $i \in I, j \in J$.

(2) 对 $i = p$, 取 $\epsilon = \min \{C_{ij} \mid i = p, j \in J\}$; 若 $\epsilon \neq 0$, 则 $C_{pj} = C_{pj} - \epsilon$, $j = 1, \dots, m$; 其中 $p = 1, \dots, m$.

(3) 对 $j = p$, 取 $\epsilon = \min \{C_{ij} \mid j = p, i \in I\}$; 若 $\epsilon \neq 0$, 则 $C_{ip} = C_{ip} - \epsilon$, $i = 1, \dots, m$; 其中 $p = 1, \dots, m$.

(4) 对 $i = 1, \dots, m$. 执行: 如果第 i 行仅有一个 $C_{ip} = 0$, 则将此 0 元素画“ Δ ”, 并将第 q 列上的 0 元素打“ \times ”, 其中 $q = 1, \dots, m$.

(5) 对 $j = 1, \dots, m$. 执行: 如果第 j 列仅有一个 $C_{pj} = 0$, 则将此 0 元素画“ Δ ”, 同时将第 p 行未作记号的 0 打“ \times ”, 其中 $p = 1, \dots, m$.

(6) 重复(4)~(5), 直至画“ Δ ”的 0 个数不再增加为止, 如果发现有未作记号的 0 元素的闭回路, 则对其中的一个 0 画“ Δ ”, 并对同行同列的其他 0 打“ \times ”.

(7) 重复(4)~(6), 直到所有 0 皆有记号为止.

(8) 检查并判断是否出现以下情况:

① 若该行只含“ \otimes ”而不含“ Δ ”, 则标“ \checkmark ”号, 转②; 否则, 即有 m 个不同行不同列的“ Δ ”元素出现, 并已获最优解, 算法结束;

② 如第 i 行已标号, 其中“ \otimes ”所在列尚无标号, 则标上“ \checkmark ”号;

③ 如第 j 列已标号, 且只有“ \otimes ”而无“ Δ ”, 便转⑤; 否则此列含有“ Δ ”, 而它所在行尚无标号, 则标上“ \checkmark ”号;

④ 重复②~③, 直到不能标号为止;

⑤ 使用倒向追踪, 即对只有“ \otimes ”而无“ Δ ”的列, 若有“ \checkmark ”, 则选该列中第 i 行的“ \otimes ”; 若选定的“ \otimes ”所在行有“ \checkmark ”, 便选该行中第 j 列的“ Δ ”; 若选的“ Δ ”所在列有标号“ \checkmark ”, 则选该列中第 k 行的“ \otimes ”. 照此追踪, 直至标“ \checkmark ”号的行为止;

接着将这一系列的“ \otimes ”、“ Δ ”、“ \otimes ”、“ \dots ”、“ \otimes ”中的“ Δ ”、“ \otimes ”分别改为“ \otimes ”、“ Δ ”, 抹去所有标号, 转②.

(9) 找能覆盖所有 0 元素的且数目最少的直线集合, 亦即在已标号的矩阵中, 对没有标号的行和已标号的列划线.

(10) 在未划线的元素中找出最小元素, 对未划线的行中各元素减去的这个最小元素, 对

划线的列中各元素都加上这个最小元素;转(4)。

从上述算法的描述中可以看到,为获总效能的完全分配方案,需要对效能矩阵(C_{ij})不断进行缩减,这个迭代过程不但要进行多次,而且操作麻烦,易于出错。

2 元素判别值分配法的求解算法

使用元素判别值分配法求解分配问题,过程简便,它不但可解 i, j 相同的分配问题,而且当 i, j 不相等时,可不必由人工增加虚设点进行求解。现举例说明元素判别值分配法的求解方法。

例1 以文[1]中7.3章节的例题求解。该问题的具体数据如图2所示。

人 \ 任务	B_1		B_2		B_3		B_4		人数
A_1	2	X_{11}	10	X_{12}	9	X_{13}	7	X_{14}	1
A_2	15	X_{21}	4	X_{22}	14	X_{23}	8	X_{24}	1
A_3	13	X_{31}	14	X_{32}	16	X_{33}	11	X_{34}	1
A_4	4	X_{41}	15	X_{42}	13	X_{43}	9	X_{44}	1
任务数	1		1		1		1		4

图2 分配问题初始平衡图

该题可用“元素判别分配法”求解,有关概念及解题步骤参看文[2]。这里简单介绍一下元素判别值的数学模型。假设函数

$$f_s(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x < 0, \\ 0, & \text{当 } x \geq 0, \end{cases}$$

则元素 X_{ij} 的判别值由下式计算

$$dX_{ij} = \sum_{s=1}^{(m-1)(m-1)} f_s(\Delta X_{ij}) = \sum_{s=1}^{(m-1)(m-1)} f_s(C_{ij} - C_{i,j+k} + C_{i+1,j+k} - C_{i+1,j}),$$

其中 $i, j=1, 2, \dots, m; 1-i \leq L \leq m-i$, 且 $L \neq 0; 1-j \leq K \leq m-j$, 且 $K \neq 0$ 。

现以元素 X_{12} 判别值的计算为例,说明如何进行实际计算,为清楚起见,元素判别值的计算使用以下形式:

矩形回路和承担任务所需时间	检验数 $\Delta X_{i,j}$	$f_s(\Delta X_{i,j})$
X_{12} 10 X_{22} 4 X_{21} 15 X_{11} 2 X_{12}	$10 - 4 + 15 - 2 > 0$	0
X_{12} 10 X_{13} 9 X_{23} 14 X_{22} 4 X_{12}	$10 - 9 + 14 - 4 > 0$	0
X_{12} 10 X_{14} 7 X_{24} 8 X_{22} 4 X_{12}	$10 - 7 + 8 - 4 > 0$	0
X_{12} 10 X_{32} 14 X_{31} 15 X_{11} 2 X_{12}	$10 - 14 + 15 - 2 > 0$	0
X_{12} 10 X_{13} 9 X_{33} 16 X_{32} 14 X_{12}	$10 - 9 + 16 - 14 > 0$	0
X_{12} 10 X_{14} 7 X_{34} 11 X_{32} 14 X_{12}	$10 - 7 + 11 - 14 = 0$	1
X_{12} 10 X_{42} 15 X_{41} 4 X_{11} 2 X_{12}	$10 - 15 + 4 - 2 > 0$	1
X_{12} 10 X_{13} 9 X_{43} 13 X_{42} 15 X_{12}	$10 - 9 + 13 - 14 = 0$	0
X_{12} 10 X_{14} 7 X_{44} 11 X_{42} 15 X_{12}	$10 - 7 + 11 - 15 < 0$	1

则 X_{12} 的判别值 $dX_{12}=0+0+0+0+0+0+0+1+0+1=2$.

其他元素判别值也极为容易地进行计算,结果填入图 3 各元素右下小方格之中.

任务 人	B_1		B_2		B_3		B_4		人数
A_1	2	X_{11}	10	X_{12}	9	X_{13}	7	X_{14}	1
		6		2	1	6		1	* (3)
A_2	15	X_{21}	4	X_{22}	14	X_{23}	8	X_{24}	1
		0	1	9		3		6	* (1)
A_3	13	X_{31}	14	X_{32}	16	X_{33}	11	X_{34}	1
		3		5		4	1	5	* (4)
A_4	4	X_{41}	15	X_{42}	13	X_{43}	9	X_{44}	1
	1	8		0		5		4	* (2)
活动量	1 * (2)		1 * (1)		1 * (3)		1 * (4)		4 4

图 3 分配问题——元素判别值分配法求解图

求解的过程如下:

(1) 所有的元素中,判别值最大的为 $dX_{22}=9$,所以 $X_{22}=1$,第 2 行和第 2 列分别作标志 * (1);

(2) 余下未分配且具有分配权的元素中,判别值最大的为 $dX_{41}=8$,则元素 $X_{41}=1$,在第 4 列和第 1 行作标志 * (2);

(3) 尚未分配且具有分配权元素中,判别值最大的为 $dX_{13}=6$,故 $X_{13}=1$,在对第 4 行和第 3 列作标志 * (3);

(4) 现在只余下 X_{34} 未分配且具有分配权,因而 $X_{34}=1$,并作相应标志.

至此,求解全部完成,其结果便是最优解,完成任务所花时间为 $4+4+9+11=28$,该方案和结果同原书及文[3,4]的答案完全一致.

3 元素判别值分配法的算法设计及程序实现

使用元素判别值分配法求解分配问题的程序包含有:(1) 任务、活动和时间(或费用)的输入、维护和查询;(2) 元素判别值的计算;(3) 按元素判别值和分配原则进行分配;(4) 耗费(时间或费用)计算;(5) 最优分配方案及其它信息的输出. 这里为叙述方便,不妨假定问题的任务、活动及时间已输入且存在有关的文件之中,并假设任务的数目为 n ,活动的数目为 m ,这样,使用元素判别值分配法求解的算法设计可简述为:

- (1) 读取 m, n ; 并取 $I=\{1, \dots, m\}, J=\{1, \dots, n\}, f=0, \Delta=\Phi$;
- (2) $X_{ij}=0, dX_{ij}=0$, 并将耗费值存入 C_{ij} , 这时 $i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$;
- (3) 计算元素判别值,即对于 $i=1, \dots, m; j=1, \dots, n; I-i \leq I \leq m-i$, 且 $1 \neq 0; I-j \leq k \leq n-j$, 且 $k \neq 0$, 执行. 如果 $C_{ij}-C_{i,j+k}+C_{i+1,j+k}-C_{i+1,j} < 0$, 则 $dX_{ij}=dX_{ij}+1$;
- (4) 确定 p, q , 使 $dX_{pq}=\max\{dX_{ij} | i \in I, j \in J\}$;
- (5) 如果 dX_{pq} 有多个值相同,则在 p 与 q 中选取 $i1, j1$, 使 $C_{i1,j1}=\min(C_{pq})$;
- (6) $X_{i1,j1}=1, f=f+C_{i1,j1}, I=I-\{i1\}, J=J-\{j1\}, \Delta=\Delta \cup \{X_{i1,j1}\}$;
- (7) 如果 $I=\{\Phi\}$ 或 $J=\{\Phi\}$, 转(8), 否则转(4);

(8) Δ 中的 X_{ij} 为最优解的元素, 则将第 j 项任务分配给第 i 个活动; 而 f 便为最省的耗费 (时间或费用)。

显然, 这个算法简单且清晰, 比匈牙利法或 0-1 规划的分歧定界法^[5]要简便得多。

分配问题的求解程序, 实际是一个系统, 现在用 Foxbase 编制, 可在微机上运行。例 1 可由该程序求解的输出如图 4 所示。

====《元素判别值分配法》求解分配问题====

问题名称:实用数学规划 7.3 例

任务数目:4	名称:	A_1, A_2, A_3, A_4
活动数目:4	名称:	B_1, B_2, B_3, B_4
活动的单位耗费:		
* 52:	1 \Rightarrow	2.00; 10.00; 9.00; 7.00;
52:	2 \Rightarrow	15.00; 4.00; 14.00; 8.00;
52:	3 \Rightarrow	13.00; 14.00; 16.00; 11.00;
52:	4 \Rightarrow	4.00; 15.00; 13.00; 9.00;
(*)(*) 元素判别值:		
$dX_{11}=6; dX_{12}=2; dX_{13}=6; dX_{14}=1;$		
$dX_{21}=0; dX_{22}=9; dX_{23}=3; dX_{24}=6;$		
$dX_{31}=3; dX_{32}=5; dX_{33}=4; dX_{34}=5;$		
$dX_{41}=8; dX_{42}=0; dX_{43}=5; dX_{44}=4;$		

分配方案:	活 动	任 务	数 量
	$A_1 \Rightarrow$	B_3	1
	$A_2 \Rightarrow$	B_2	1
	$A_3 \Rightarrow$	B_4	1
	$A_4 \Rightarrow$	B_1	1

最省耗费为:28.00

图 4 例 1 程序求解输出图

该方案和运费同原书一致。文中 * 答案中的 52 系该程序求解问题的编号。

例 2 文[3]中节 3.12.3 之例。假设某经理必须从 8 辆车中安排 5 辆卡车到 5 个指定的地点去装货。8 辆卡车放在 8 个不同的地点。现要求安排 5 辆卡车到 5 个指定的地点去装货, 使得运费最小, 运费如附表所示。

附表 卡车运费表

卡车	装 载 地 点				
	A	B	C	D	E
1	300	290	280	290	210
2	250	310	290	300	200
3	180	190	300	190	180
4	320	180	190	240	170
5	270	210	190	250	160
6	190	200	220	190	140
7	220	300	230	180	160
8	260	190	260	210	180

该题使用原书的求解方法必须由人工虚设 3 个装载地点 F, G 和 H 方能求解。

若应用“元素判别值分配法”求解则将由程序自动增设一个虚拟点,以便使其“供需平衡”,则该点的“任务等于 $3(8-5)$ ”。这样,可进行求解,其结果输出如图 5 所示。

<p>===《元素判别值分配法》求解分配问题=== 问题名称:运筹学导论节 3.12.3 例题</p>			
<p>任务数目:5 名称:装载地点 A,装载地点 B,装载地点 C, 装载地点 D,装载地点 E</p>			
<p>活动数目:8 名称:卡车 1,卡车 2,卡车 3,卡车 4 卡车 5,卡车 6,卡车 7,卡车 8</p>			
<p>活动的单位耗费:</p>			
54::	1	⇒	300 290 280 290 210
54::	2	⇒	250 310 290 300 200
54::	3	⇒	180 190 300 190 180
54::	4	⇒	320 180 190 240 170
54::	5	⇒	270 210 190 250 160
54::	6	⇒	190 200 220 190 140
54::	7	⇒	220 300 230 180 160
54::	8	⇒	260 190 260 210 180
<p>(*)(*) 元素判别值:</p>			
<p>$dX_{11}=12; dX_{12}=14; dX_{13}=19; dX_{14}=11; dX_{15}=17;$ $dX_{21}=28; dX_{22}=4; dX_{23}=12; dX_{24}=7; dX_{25}=21;$ $dX_{31}=0; dX_{32}=22; dX_{33}=0; dX_{34}=23; dX_{35}=9;$ $dX_{41}=0; dX_{42}=30; dX_{43}=29; dX_{44}=14; dX_{45}=15;$ $dX_{51}=9; dX_{52}=19; dX_{53}=30; dX_{54}=8; dX_{55}=21;$ $dX_{61}=25; dX_{62}=15; dX_{63}=14; dX_{64}=20; dX_{65}=19;$ $dX_{71}=22; dX_{72}=1; dX_{73}=19; dX_{74}=30; dX_{75}=18;$ $dX_{81}=11; dX_{82}=27; dX_{83}=11; dX_{84}=22; dX_{85}=12.$</p>			
分配方案:	活 动	任 务	数 量
	卡车 1	⇒	1
	卡车 2	⇒	1
	卡车 3	⇒ 装载地点 A	1
	卡车 4	⇒ 装载地点 B	1
	卡车 5	⇒ 装载地点 C	1
	卡车 6	⇒ 装载地点 E	1
	卡车 7	⇒ 装载地点 D	1
	卡车 8	⇒	1
<p>最省耗费为:870.00</p>			

图 5 例 2 程序求解输出图

4 结束语

元素判别值分配法不但可用于求解运筹学中分配问题,而且可用于求解运输的调运问题^[2],它的明显特点是:

- (1) 元素判别值的数学模型及其计算简单,分配原则和求解过程简易;
- (2) 一次分配成功,不必多次迭代;
- (3) 不是对现行方法的改进或模仿,而是在求解方法的集合中找一条完全新的途径. 这一求解途径至今尚未被其他人所涉及. 因而该方法具有独特的创新法.

参 考 文 献

- 1 吴文江,袁仪方. 实用数学规划. 北京:机械工业出版社,1993:216~238
- 2 张银明. 调运问题的新解法——元素判别值分配法的研究与实现. 华侨大学学报(自然科学版),1994,4(4):447~453
- 3 吉勒特 B E 著. 运筹学导论——计算机算法. 蔡宣三等译. 北京:机械工业出版社,1982. 90~104,165~175
- 4 王永县. 运筹学——规划论及网络. 北京:清华大学出版社,1993. 83~87
- 5 魏国华,傅家良,周仲良. 实用运筹学. 上海:复旦大学出版社,1993. 116~163

A New Solution to Allocation Problem in Operational Research and Its Algorithm Design and Program Execution

Zhang Yinming

(Dept. of Electron. Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract At present, allocation problem is generally solved by Hungarian method or 0-1 layout method, the procedure of which is rather complex. Based on a new way of study, the author gives here the method of element discrimination value allocation and its algorithm and program execution, the procedure is simple and convenient. With this handy method, optimal allocation can be obtained by a single allocation

Keywords operational research, allocation problem, allocation method of element discrimination value