

空间钢框架弹塑性稳定分析 的一种数值方法*

欧 阳 煜

(华侨大学土木工程系, 泉州 362011)

摘要 采用杆系有限元对空间钢框架结构进行整体稳定分析,并推导出空间塑性铰单元稳定刚度矩阵. 本法可适用于任意形式的空间框架结构,并能给出结构的荷载位移曲线,所获得的数值结果与有关实验数据吻合得较好.

关键词 钢结构,稳定分析,极限荷载,框架

分类号 TU 391.01

目前,对于钢框架进行稳定分析通常采用两种方法,即塑性铰法和塑性区法. 塑性区法是把一根杆件分为几个单元,并在杆截面上也划分为几个纤维单元,从而可以精确地描述整个结构上所出现的塑性区范围,因而通常被认为是精确解. 但由于同时从杆长和截面两个方向划分单元,因此,其计算量很大,一般用于专门理论研究的精确解. 塑性铰法在实用设计上则比塑性区法更为简便,一般只把一个杆件当作一个单元,在杆横截面上不再划分单元,因此,其计算量大为减少. 目前,对钢框架稳定分析的研究工作大都集中在平面框架分析上,而实际结构都是处于三维空间工作状态. 这样必然会有相当的误差,特别是当结构处于弹塑性状态时,更有必要采用空间三维分析.

1 基本假定

基本假定:(1) 材料为理想的弹塑性体;(2) 杆截面为双轴对称,忽略杆端翘曲变形;(3) 杆截面在达到全塑性状态前处于弹性状态;(4) 塑性铰只出现在杆的两端,中间部分均处于弹性工作状态.

对于空间框架体系,各杆件均处于双向荷载作用下. 杆截面进入塑性状态,形成塑性铰的判别条件^[1],即

$$(M_x/M_{px})^\alpha + (M_y/M_{py}) = 1, \quad (1)$$

式中 $M_{px} = 1.18M_{px}(1 - N/N_p) \leq M_{px}$, $M_{py} = 1.19M_{py}[1 - (N/N_p)^2] \leq M_{py}$, $\alpha = 1.6 - (N/N_p)/(2\ln \frac{N}{N_p})$.

* 本文 1996-12-08 收到

2 考虑几何非线性弹性杆单元刚度

对于无节间荷载的等截面杆(图1),在考虑轴向力的二阶效应时,其挠度微分方程为

$$\left. \begin{aligned} EI_x Y_{,xxxx} + PY_{,xx} &= 0, \\ EI_y Y_{,xxxx} + PY_{,xx} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

杆端力和杆端位移的关系可通过力平衡方程求得,其关系式为

$$K^e \delta^e = F^e, \quad (3)$$

式中 $F^e = [F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4 \ F_5 \ F_6 \ F_7 \ F_8]^T$, $\delta^e = [\delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3 \ \delta_4 \ \delta_5 \ \delta_6 \ \delta_7 \ \delta_8]^T$, K^e 为弹性杆单元刚度矩阵。

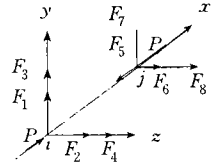


图1 杆端力编号

$$K^e = \begin{bmatrix} 12 \frac{i_x}{l^2} \Phi_{1x} & & & & & & & \\ & 0 & 12 \frac{i_y}{l^2} \Phi_{1y} & & & & & \\ & 0 & -6 \frac{i_y}{l} \Phi_{2y} & 4i_y \Phi_{3y} & & & & \\ 6 \frac{i_x}{l} \Phi_{2x} & 0 & 0 & 4i_x \Phi_{3x} & & & & \\ -12 \frac{i_x}{l^2} \Phi_{1x} & 0 & 0 & -6 \frac{i_x}{l} \Phi_{2x} & 12 \frac{i_x}{l^2} \Phi_{1x} & & & \\ & 0 & -12 \frac{i_y}{l^2} \Phi_{1y} & 6 \frac{i_y}{l} \Phi_{2y} & 0 & 0 & 12 \frac{i_y}{l^2} \Phi_{1y} & \\ & 0 & -6 \frac{i_y}{l} \Phi_{2y} & i_y \Phi_{4y} & 0 & 0 & 6 \frac{i_y}{l} \Phi_{2y} & 4i_y \Phi_{3y} \\ 6 \frac{i_x}{l} \Phi_{2x} & 0 & 0 & 2i_x \Phi_{4x} & -6 \frac{i_x}{l} \Phi_{2x} & 0 & 0 & 4i_x \Phi_{3x} \end{bmatrix} \quad \text{对称}$$

其中 $\Phi_{1y} = U_y^3 S_y / 12(2 - 2C_y - U_y S_y)$, $\Phi_{1x} = U_x^3 S_x / 12(2 - 2C_x - U_x S_x)$; $\Phi_{2y} = U_y^2(1 - C_y) / 6(2 - 2C_y - U_y S_y)$, $\Phi_{2x} = U_x^2(1 - C_x) / 6(2 - 2C_x - U_x S_x)$; $\Phi_{3y} = U_y(S_y - U_y C_y) / 4(2 - 2C_y - U_y S_y)$, $\Phi_{3x} = U_x(S_x - U_x C_x) / 4(2 - 2C_x - U_x S_x)$; $\Phi_{4y} = U_y(U_y - S_y) / 2(2 - 2C_y - U_y S_y)$, $\Phi_{4x} = U_x(U_x - S_x) / 2(2 - 2C_x - U_x S_x)$ 。

上式中, $S_y = \sin U_y$, $S_x = \sin U_x$; $C_y = \cos U_y$, $C_x = \cos U_x$; $i_y = EI_y / l$, $i_x = EI_x / l$ 。若轴力 P 为拉力, 则 $\Phi_{1y} = U_y^3 Sh_y / 12(2 - 2Ch_y + U_y Sh_y)$, $\Phi_{1x} = U_x^3 Sh_x / 12(2 - 2C_x + U_x Sh_x)$; $\Phi_{2y} = U_y^2(Ch_y - 1) / 6(2 - 2Ch_y + U_y Sh_y)$, $\Phi_{2x} = U_x^2(Ch_x - 1) / 6(2 - 2Ch_x + U_x Sh_x)$; $\Phi_{3y} = U_y(U_y Ch_y - Sh_y) / 4(2 - 2Ch_y + U_y Sh_y)$, $\Phi_{3x} = U_x(U_x Ch_x - Sh_x) / 4(2 - 2C_x + U_x Sh_x)$; $\Phi_{4y} = U_y(Sh_y - U_y) / 2(2 - 2Ch_y + U_y Sh_y)$, $\Phi_{4x} = U_x(Sh_x - U_x) / 2(2 - 2Ch_x + U_x Sh_x)$ 。

其中 $Sh_y = \sinh U_y$, $Sh_x = \sinh U_x$; $Ch_y = \cosh U_y$, $Ch_x = \cosh U_x$ 。当轴力 $P = 0$ 时, 可以得到下式

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{1y} &= \Phi_{2y} = \Phi_{3y} = \Phi_{4y} = 1, \\ \Phi_{1x} &= \Phi_{2x} = \Phi_{3x} = \Phi_{4x} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

3 考虑几何非线性的空间弹塑性杆单元刚度

当杆端弯矩满足式(1)时,即认为截面进入塑性状态,已形成塑性铰,并释放转角自由度.若杆单元一端形成塑性铰,称为“固结-塑性铰单元”;若两端形成塑性铰,则称为“塑性铰-塑性铰单元”.

首先,将节点平衡方程按是否进行释放的自由度分为两部分,即

$$\begin{bmatrix} K_{OO} & K_{OR} \\ K_{RO} & K_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_O \\ \delta_R \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_O \\ p_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_O \\ q_R \end{bmatrix}, \quad (5)$$

式中 δ_R 为单元中需要释放的自由度; δ_O 为单元中需要保留的自由度; p_R, p_O 为相应的等效结点荷载; q_R, q_O 为相应的单元杆端广义力; $K_{OO}, K_{OR}, K_{RO}, K_{RR}$ 为相应的单元刚度块.

对于要释放的自由度,相应的广义力为零,即 $q_R=0$,将其代入式(4),可得

$$K^{**} \delta_O - p^{**} = q^{**}, \quad (6)$$

式中 $K^{**} = K_O - K_{OR} K_{RR}^{-1} K_{RO}$, $p^{**} = p_O - K_{OR} K_{RR}^{-1} p_R$, $q^{**} = q_O$; 而 K^{**} , p^{**} , q^{**} 分别为释放自由度后的单元刚度矩阵、等效结点荷载列阵和杆端广义力列阵.

(1) 固结-塑性铰单元. 设单元 j 端形成塑性铰,应释放的自由度为 δ_7, δ_8 .

$$K_{OO} = \begin{bmatrix} 12 \frac{i_x}{l^2} \Phi_{1x} & 0 & 0 & 6 \frac{i_x}{l} \Phi_{2x} & -12 \frac{i_x}{l^2} \Phi_{1x} & 0 \\ 0 & 12 \frac{i_y}{l^2} \Phi_{1y} & -6 \frac{i_y}{l} \Phi_{2y} & 0 & 0 & -12 \frac{i_y}{l^2} \Phi_{1y} \\ 0 & -6 \frac{i_y}{l} \Phi_{2y} & 4i_y \Phi_{3y} & 0 & 0 & 6 \frac{i_y}{l} \Phi_{2y} \\ 6 \frac{i_x}{l} \Phi_{2x} & 0 & 0 & 4i_x \Phi_{3x} & -6 \frac{i_x}{l} \Phi_{2x} & 0 \\ -12 \frac{i_x}{l^2} \Phi_{1x} & 0 & 0 & -6 \frac{i_x}{l} \Phi_{2x} & 12 \frac{i_x}{l^2} \Phi_{1x} & 0 \\ 0 & -12 \frac{i_y}{l^2} \Phi_{1y} & 6 \frac{i_y}{l} \Phi_{2y} & 0 & 0 & 12 \frac{i_y}{l^2} \Phi_{1y} \end{bmatrix}$$

$$K_{OR} K_{RR}^{-1} K_{RO} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{9i_x}{l^2} \frac{\Phi_{2x}^2}{\Phi_{3x}} & 0 & 0 & \frac{3i_x}{l} \frac{\Phi_{2x}\Phi_{4x}}{\Phi_{3x}} & -\frac{9i_x}{l^2} \frac{\Phi_{2x}^2}{\Phi_{3x}} & 0 \\ 0 & \frac{9i_y}{l^2} \frac{\Phi_{2y}^2}{\Phi_{3y}} & -\frac{3i_y}{l} \frac{\Phi_{2y}\Phi_{4y}}{\Phi_{3y}} & 0 & 0 & -\frac{9i_y}{l^2} \frac{\Phi_{2y}^2}{\Phi_{3y}} \\ 0 & -\frac{3i_y}{l} \frac{\Phi_{2y}\Phi_{4y}}{\Phi_{3y}} & i_y \frac{\Phi_{4y}^2}{\Phi_{3y}} & 0 & 0 & \frac{3i_y}{l} \frac{\Phi_{2y}\Phi_{4y}}{\Phi_{3y}} \\ \frac{3i_x}{l} \frac{\Phi_{2x}\Phi_{4x}}{\Phi_{3x}} & 0 & 0 & i_x \frac{\Phi_{4x}^2}{\Phi_{3x}} & -\frac{3i_x}{l} \frac{\Phi_{2x}\Phi_{4x}}{\Phi_{3x}} & 0 \\ -\frac{9i_x}{l^2} \frac{\Phi_{2x}^2}{\Phi_{3x}} & 0 & 0 & -\frac{3i_x}{l} \frac{\Phi_{2x}\Phi_{4x}}{\Phi_{3x}} & \frac{9i_x}{l^2} \frac{\Phi_{2x}^2}{\Phi_{3x}} & 0 \\ 0 & -\frac{9i_y}{l^2} \frac{\Phi_{2y}^2}{\Phi_{3y}} & \frac{3i_y}{l} \frac{\Phi_{2y}\Phi_{4y}}{\Phi_{3y}} & 0 & 0 & \frac{9i_y}{l^2} \frac{\Phi_{2y}^2}{\Phi_{3y}} \end{bmatrix}.$$

(2) 塑性铰-塑性铰单元. 应释放的自由度分别为 $\delta_3, \delta_4, \delta_7, \delta_8$, 则

$$K_{00} = \begin{bmatrix} 12 \frac{i_x}{l^2} \Phi_{1x} & 0 & -12 \frac{i_x}{l^2} \Phi_{1x} & 0 \\ 0 & 12 \frac{i_y}{l^2} \Phi_{1y} & 0 & -12 \frac{i_y}{l^2} \Phi_{1y} \\ -12 \frac{i_x}{l^2} \Phi_{1x} & 0 & 12 \frac{i_x}{l^2} \Phi_{1x} & 0 \\ 0 & -12 \frac{i_y}{l^2} \Phi_{1y} & 0 & 12 \frac{i_y}{l^2} \Phi_{1y} \end{bmatrix},$$

$$K_{OR} K_{RR}^{-1} K_{RO} = \begin{bmatrix} \frac{36\Phi_{2x}^2 i_x}{(2\Phi_{3x} + \Phi_{4x})l^2} & 0 & \frac{-36\Phi_{2x}^2 i_x}{(2\Phi_{3x} + \Phi_{4x})l^2} & 0 \\ 0 & \frac{36\Phi_{2y}^2 i_y}{(2\Phi_{3y} + \Phi_{4y})l^2} & 0 & \frac{-36\Phi_{2y}^2 i_y}{(2\Phi_{3y} + \Phi_{4y})l^2} \\ \frac{-36\Phi_{2x}^2 i_x}{(2\Phi_{3x} + \Phi_{4x})l^2} & 0 & \frac{36\Phi_{2x}^2 i_x}{(2\Phi_{3x} + \Phi_{4x})l^2} & 0 \\ 0 & \frac{-36\Phi_{2y}^2 i_y}{(2\Phi_{3y} + \Phi_{4y})l^2} & 0 & \frac{36\Phi_{2y}^2 i_y}{(2\Phi_{3y} + \Phi_{4y})l^2} \end{bmatrix}.$$

4 结构矩阵位移方程的建立及求解

以荷载增量形式, 建立如下的结构平衡方程, 即 $K_p \Delta \delta = \Delta F$, 并在每级荷载增量下采用 Newton-Raphson 法求解位移增量. 若结构总刚度矩阵行列式由正变负, 则认为结构开始失稳, 上一级荷载定义为结构极限承载力.

5 算例

5.1 算例 1

有一空间钢框架, 如图 2 所示. 下面, 叙述其截面尺寸、荷载、材料屈服极限和弹性模量.

(1) 梁尺寸. $b=30$ mm, $h=30$ mm, $t_w=4$ mm, $d=4.2$ mm;

(2) 柱尺寸. $b=25$ mm, $h=25$ mm, $t_w=4$ mm, $d=4.3$ mm;

(3) 荷载. $P_j=9$ kN, $P_b=1.8$ kN, 水平荷载为 H_x, H_y ;

(4) 材料屈服极限为 $\delta_y=310$ N·mm⁻²; 弹性模量为 $E=2.075 \times 10^5$ N·mm⁻².

当 $H_y=0$ 时, 荷载位移如图 3 所示. 计算所得极限荷载 $H_x=2.10$ kN, 试验所得极限荷载 $H_t=2.05$ kN⁽²⁾. 两者误差为 $\delta_1=(H_t-H_x)/H_t=-2.3\%$.

由此可见, 本文方法具有相当的精度. 空间框架结构受侧向力 H 作用, H 可以分解为 H_x, H_y , 平面分析是把 H_x, H_y 分别作用于两个方向框架上, 两主轴方向侧向力比值 H_y/H_x 表征为 α . 当至少一个方向上框架达到极限状态时, 即认为此时的 H 为该结构的极限承载力. 表 1 列出平面分析和空间分析所得框架极限承载力 H_p 与 H 的比较值.

图 4 中曲线 ADC 为该空间框架极限承载力曲线. 过曲线上任意一点 D 与原点 O 的连线

表示为:当结构受到方向与 y 轴成 θ 角,且大小值为 $|OD|$ 的侧向力作用时,结构将达到极限状

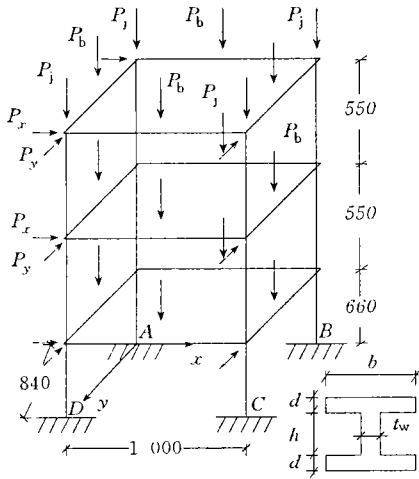


图2 空间钢框架

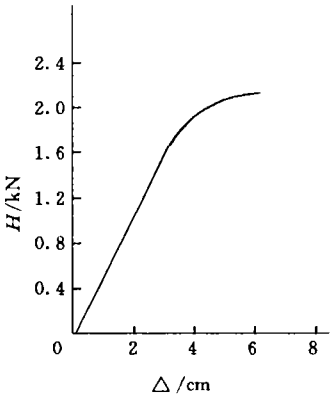


图3 荷载位移曲线

表 1 平面分析和空间分析的极限承载力比较

α	0 : 0	1 : 4	2 : 4	3 : 4	4 : 4	4 : 3	4 : 2	4 : 1
H_p/kN	1.900	1.960	2.120	1.558	1.308	1.156	1.034	0.953
H/kN	1.900	1.650	1.453	1.200	1.131	1.067	1.962	0.907
$\delta_1/(\%)$	0.0	18.8	46.2	29.9	15.7	8.3	7.5	5.0

态而失稳破坏. 点划线上的 ABC 为平面分析所得空间框架极限承载力曲线, H_{px} , H_{py} 为平面

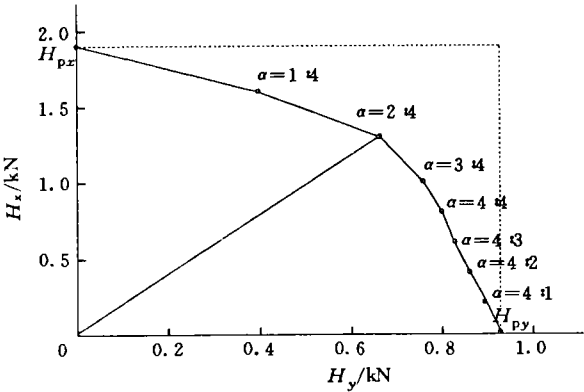


图4 空间框架极限承载力曲线

分析所得两主轴方向框架的极限承载力. 由此可见,当空间框架结构两主轴方向侧向力比值越接近 $H_{py} : H_{px}$ 时,采用平面分析误差便越大.

5.2 算例 2

为考虑主弯曲对空间框架极限承载力的影响,本文选取一组梁柱截面,其结构型式和受荷状态如图 2 框架所示. 对层数、梁间荷载值不同的结构进行计算,其结果见表 2.

表 2 中 H_{x_1}, Δ_{x_1} 为考虑主弯曲的极限承载力和位移; H_{x_2}, Δ_{x_2} 为不考虑主弯曲的极限承载

力和位移; δ_1 为极限承载力的误差, δ_2 为顶点侧移的误差. 由表 2 可见,随着层数增加,主弯曲对框架承载力的影响逐步增大,其误差可占 10%~15%. 因此,对于多层框架,忽略主弯曲影响是不合适的.

表 2 考虑主弯曲线极限承载力和顶点侧移的影响

框架类型	P_b/kN	H_{x_1}/kN	H_{x_2}/kN	$\delta_1/(\%)$	Δ_{x_1}/cm	Δ_{x_2}/cm	$\delta_2/(\%)$
单框层架	3.6	3.562	3.789	6.1	0.798	0.755	-5.2
三框层架	3.6	1.099	1.241	12.9	2.000	1.822	-8.9
六框层架	3.6	0.510	0.586	14.9	2.704	2.357	-13.0

6 结论

采用本法可获得结构在实际三维空间工作状态下的荷载位移曲线. 通过与有关实验的比较,可知其精度是较高的. 本文对一些空间受力状态明显的结构进行计算,并讨论了采用平面分析所带来的误差. 通过算例可得出如下结论.

(1) 对于同时承受双向侧向力作用的空间框架结构,当侧向力比值越接近两主轴方向极限承载力比值 $H_{px} : H_{py}$ 时,采用平面分析误差便越大.

(2) 对于单层框架结构,若不计主弯曲影响,则便框架极限承载力误差不大;但对于多层框架结构,不考虑主弯曲影响则是不合适的.

参 考 文 献

1 Cheng W F. Atsuta theory of beam-columns. New York: Mcgraw-Hill Book Company, 1977. 161~167
2 沈祖炎,丁洁民. 空间钢框架弹塑性稳定的综合离散法. 同济大学学报(自然科学版). 1992, 20 (1):1~10

A Numerical Method for Analysing Elasticoplastic Stability
of Three-Dimensional Steel Frames

Ouyang Yu

(Dept. of Civil Eng. , Huaqiao Univ. , 362011,Quanzhou)

Abstract A global stability analysis of three-dimensional frame structures is conducted on member systems by finite element method; and a stable stiffness matrix is derived for the space plastic hinge element. The method will be suited to space frame structure of any state, and the load displacement curve of which will be given. The numerical results tally with experimental data.

Keywords steel frames, stability, ultimate load, frame