第 18 卷 第 3 期
1997 年 7 月
华侨大学学报(自然科学版)
Journal of Huaqiao University (Natural Science)
Vol. 18 No. 3
Jul. 1997

球面上常中曲率的子流形*

王 银 河

(内蒙古师范大学数学系,呼和浩特 010000)

摘要 从 Ricci 曲率角度讨论了单位球面中具有常平均中曲率的紧致子流形,以及具有常数量曲率的紧致子流形,得到了两个 Pinching 定理.

关键词 子流形,Ricci 曲率,全脐

分类号 O 186.12

1 约立和基本公式

设 M 是单位球面 S^{n+p} 中 n 维常中曲率的紧致子流形.一个基本的问题是:在什么条件下,M 为全脐子流形.文[1]得到,当 $n\geqslant 4$ 且 Ricci 曲率不小于 $\frac{n(n-2)}{n-1}(1+H^2)$ 时,M 是全脐的;文[2]得到,当 $p=1$,Ricci 曲率大于 $n-2+\frac{1}{8}n^2H^2$ 时,则 M 是全脐超曲面.显然,在某些中曲率取值范围内,$n-2+\frac{1}{8}n^2H^2\leqslant\frac{n(n-2)}{n-1}(1+H^2)$.本文的目的是证明以下定理.

定理 1 设 M 是 $S^{n+p}(n\geqslant 4)$ 中的 n 维常中曲率的紧致子流形,若 M 在任一点处的 Ricci 曲率大于 $n-2+\frac{1}{8}n^2H^2$,则 M 是全脐子流形.显然,定理 1 完全推广了文[2]的结果,并且在某种程度上所得的 Pinching 常数要比文[1]好.

定理 2 设 M 是 S^{n+1} 中具有常数量曲率的紧致超曲面,若 M 的 Ricci 曲率大于 $n-2+\frac{1}{8}n^2H^2$,且 $H^2\leqslant\frac{8}{n^2}$,则 M 是全脐超曲面.

本文中指标约立如下

$$1\leqslant i,j,k,l,m\leqslant n;\ n+1\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant n+p.$$

设 S^{n+p} 是 $n+p$ 维单位球面,M 为其 n 维子流形.关于 S^{n+p} 和 M 的结构方程及第二基本形式的共变系数的概念和符号,本文与文[1]完全相同,在此不再赘述.

记 H^α 为 n 阶方阵 (h^α_{ij}),$\sigma=\sum\limits_{\substack{i,j\\ \beta\neq n+1}}(h^\beta_{ij})^2$.这里 $e_1,e_2,\cdots,e_n,e_{n+1},\cdots,e_{n+p}$ 是 M 的局部正交规范标架,(e_i) 是切标架,(e_α) 是法标架,而 e_{n+1} 为中曲率方向.一个直接的计算可得

$$\sum_{\substack{i,j\\ \beta\neq n+1}}h^\beta_{ij}\Delta h^\beta_{ij}=\sum_{\substack{\alpha\\ \beta\neq n+1}}\mathrm{tr}(H^\alpha H^\beta-H^\beta H^\alpha)^2-\sum_{\substack{\alpha\\ \beta\neq n+1}}[\mathrm{tr}(H^\alpha H^\beta)]^2+n\sigma+\sum_{\alpha\neq n+1}A_\alpha,\qquad(1)$$

式中 $A_\alpha=\mathrm{tr}(H^\alpha H^{n+1})^2-[\mathrm{tr}(H^\alpha H^{n+1})]^2+[\mathrm{tr}(H^\alpha)^2H^{n+1}]\mathrm{tr}H^{n+1}-\mathrm{tr}(H^\alpha)^2(H^{n+1})^2$.

* 本文 1997-01-23 收到;内蒙古自治区自然科学基金资助项目

2 引理和定理的证明

引理1 设K,Q分别表示M上任一点处截面曲率和Ricci曲率的下确界,则有

$$K \geqslant Q - (n - 2 + \frac{1}{8}n^2H^2). \tag{2}$$

证明 在S^{n+p}上选取适当的局部正交规范标架场(e_A),使限制在M上时的(e_i)切于M,e_{n+1}为中曲率方向.于是,当$i\neq j$时,由Gauss方程在M上任一点处,有

$$\begin{aligned} Q - R_{ijij} &\leqslant \sum_{m\neq i} R_{imim} - R_{ijij} = \sum_{m\neq i,j} R_{imim} \\ &= \sum_{m\neq i,j} (\delta_{ii}\delta_{mm} - \delta_{im}^2) + \sum_{\alpha,m\neq i,j} [h_{ii}^\alpha h_{mm}^\alpha - (h_{im}^\alpha)^2] \\ &= n - 2 + \sum_{\alpha,m\neq i,j} h_{ii}^\alpha h_{mm}^\alpha - \sum_{\alpha,m\neq i,j} (h_{im}^\alpha)^2 \\ &= n - 2 + nHh_{ii}^{n+1} - \sum_\alpha h_{ii}^\alpha h_{jj}^\alpha - \sum_{\alpha m}(h_{im}^\alpha)^2 + \sum_\alpha (h_{ij}^\alpha)^2. \end{aligned} \tag{3}$$

同理可得

$$Q - R_{jiji} \leqslant \sum_{m\neq j} R_{jmjm} - R_{jiji} = n - 2 + nHh_{jj}^{n+1} - \sum_\alpha h_{ii}^\alpha h_{jj}^\alpha - \sum_{\alpha m}(h_{jm}^\alpha)^2 + \sum_\alpha (h_{ij}^\alpha)^2. \tag{4}$$

由式(3),(4)可得

$$\begin{aligned} 2(Q - R_{ijij}) &\leqslant 2(n-2) + nH(h_{ii}^{n+1} + h_{jj}^{n+1}) \\ &\quad - \sum_\alpha (h_{ii}^\alpha + h_{jj}^\alpha)^2 - \sum_{\alpha,m\neq i,j} [(h_{im}^\alpha)^2 + (h_{jm}^\alpha)^2] \\ &\leqslant 2(n-2) + nH(h_{ii}^{n+1} + h_{jj}^{n+1}) - (h_{ii}^{n+1} + h_{jj}^{n+1})^2. \end{aligned} \tag{5}$$

记$\lambda = h_{ii}^{n+1} + h_{jj}^{n+1} (i\neq j)$,则由式(5)知

$$\begin{aligned} Q - R_{ijij} &\leqslant n - 2 + \frac{1}{2}nH\lambda - \frac{1}{2}\lambda^2 \\ &= n - 2 + \frac{1}{8}n^2H^2 - \frac{1}{2}(\lambda - \frac{1}{2}nH)^2 \\ &\leqslant n - 2 + \frac{1}{8}n^2H^2, \end{aligned} \tag{6}$$

由式(6)即得$R_{ijij} \geqslant Q - (n - 2 + \frac{1}{8}n^2H^2)$.引理1证毕.

下面我们给出定理1和定理2的证明.

(1) 定理1的证明.在S^{n+p}上选取适当的局部正交规范标架场(e_A),$1\leqslant A\leqslant n+p$,使限制在$M$上时,$(e_i)$切于$M$,$(e_\alpha)$为法标架,$e_{n+1}$为平均曲率方向.当定理1条件成立时,由引理1知$M$的截面曲率处处大于零,因此,$M$关于$e_{n+1}$是全脐的($S$为脐的).利用式(1)及文[1]中的定理1的证明过程的后半段可知

$$\sum_{\substack{i,j\\ \beta\neq n+1}} h_{ij}^\beta \Delta h_{ij}^\beta \geqslant n\sigma[Q - (n-2)(1 + H^2)], \tag{7}$$

直接计算得

$$\frac{1}{2}\Delta\sigma = \sum_{\substack{i,j,k\\ \beta\neq n+1}} (h_{ijk}^\beta)^2 + \sum_{\substack{i,j,k\\ \beta\neq n+1}} h_{ij}^\beta \Delta h_{ij}^\beta. \tag{8}$$

容易验证,当$Q > n - 2 + \frac{1}{8}n^2H^2 (n\geqslant 4)$时,$Q > (n-2)(1 + H^2)$,所以由式(7),(8)及Hopf极大原理知定理1条件成立时,$\sigma = 0$,即M关于e_α是全脐的$(n+1\leqslant\alpha\leqslant n+p)$.定理1证毕.

(2) 定理 2 的证明. 由 $Q>n-2+\frac{1}{8}n^2H^2$ 及 $H^2\leqslant\frac{8}{n^2}$ 知,M 的截面曲率大于零且 Ricci 曲率不小于 $n-1$. 由文[3]知 M 是伪凸的,可设 $H>0$. 考虑

$$R=n(n-1)-s+n^2H^2, \tag{9}$$

设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 M 的主曲率,则由式(9)得

$$\Delta(\sum_i\lambda_i^2)=n^2\Delta(H^2)=\sum_{i,j,k}(h_{ijk})^2+n\sum_i\lambda_iH_{ii}+\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\lambda_i-\lambda_j)^2R_{ijij}. \tag{10}$$

由式(8)得

$$n\sum_i(\sum_{j\neq i}\lambda_i)H_{ii}=\sum_{i,j,k}(h_{ijk}{}^2-n^2|\mathrm{grad}H|^2+\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\lambda_i-\lambda_j)R_{ijij}, \tag{11}$$

由于 M 是紧致的,所以存在 $x_0\in M$,使 H 在 x_0 点取得最大值,在 x_0 点有

$$\mathrm{grad}H=0,\ H_{ii}\leqslant 0. \tag{12}$$

由式(11),(12)知,在 x_0 点必有

$$\frac{1}{2}\sum_{ij}(\lambda_i-\lambda_j)^2R_{ijij}=0, \tag{13}$$

从而 $\lambda_i=\lambda_j(1\leqslant i,j\leqslant n)$,即 x_0 点是全脐的. 所以,在 x_0 点 $S=nH^2$,将它代入式(9),可得

$$H^2=\frac{R-n(n-1)}{n(n-1)},$$

于是在 M 上任何点成立 $H^2\leqslant\frac{R-n(n-1)}{n(n-1)}$,再由式(12)即知在 M 上 $S\leqslant nH^2$ 成立. 但又知 $S\geqslant nH^2$,所以必然有 $S=nH^2$,即 M 是全脐的. 定理 2 证毕.

参　考　文　献

1　孙自琪. 球面上的常中曲率子流形. 数学进展,1987,16(1):91～96

2　王文丽. 关于常曲率图间中的超曲面. 内蒙古师范大学学报,1995,(2):14～17

3　Yau S T. Submanifolds with constant mean curvature (Ⅱ). Amer. J. Math. ,1975,97(1):76～100

Submanifold with Constant Mean Curvature in a Sphere

Wang Yinhe

(Dept. of Manag. .Inner Mongolia Norm. Univ. . 010000.)

Abstract　In an unit sphere, the compact submanifold with constant mean curvature and the combact submanifold with constant scalar curvature are discussed from the angle of Ricci curvature. Two Pinching theorems are obtained, which extend some authors' corresponding results to a certain extent.

Keywords　submanifold, Ricci curvature, totally umbilical