第18卷 第3期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.18 No.3
1997年7月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jul. 1997

对流方程的一类新的恒稳差分格式*

曾 文 平

(华侨大学管理信息科学系，泉州 362011)

摘要 对对流方程 $u_t=au_x$ 构造一族含双参数的三层差分格式，当参数 $\alpha=1/2,\beta=0$ 时得到双层格式．这些格式对任意非负参数均为绝对稳定的，其局部截断误差为 $O(\Delta t^2+\Delta x^4)$.

关键词 对流方程，差分格式，绝对稳定

分类号 O 241.82

人们一直对对流方程 $\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial u}{\partial x}$ 感兴趣，已建立了各种各样的差分格式[1~4]．本文构造了一族三层(特殊情况下为两层)含双参数，绝对稳定的新的隐式差分格式，其局部截断误差为 $O(\Delta t^2+\Delta x^4)$．当参数 $\alpha=1/2,\beta=0$ 时得到一个两层恒稳的差分格式．所有这些格式其系数矩阵是三对角线型的，从而可用追赶法求解．

1 差分格式的构造

考虑对流方程的初值问题

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}-a\frac{\partial u}{\partial x}=0\ (t>0),\\&u(x,0)=\varphi(x)\ (-\infty<x<+\infty).\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

设问题(1)的解 $u(x,t)$ 充分光滑．于是，由方程(1)可得如下关系式

$$\frac{\partial^{q+p}u}{\partial t^q\partial x^p}=a^q\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^{p+q}}\ (p,q=0,1,\cdots),\tag{2}$$

又设时间步长为 Δt、空间步长为 Δx. 网格区域由点集 $(x_m,t_n)(m=0,\pm1,\cdots;n=0,1,\cdots)$ 所组成，其中 $x_m=m\Delta x,t_n=n\Delta t$，再设 $r=\frac{a\Delta t}{\Delta x}$，在网点 (x_m,t_n) 处的网格函数 $u(x_m,t_n)$ 记为 u_m^n. 对流方程(1)构造的三层双参数隐式差分格式(初值条件的离散化同文[1]，从略)为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{6\Delta t}\left[(\alpha+\frac{1}{2})u_{m+1}^{n+1}-2\alpha u_{m+1}^n+(\alpha-\frac{1}{2})u_{m+1}^{n-1}\right]\\&+\frac{4}{6\Delta t}\left[(\alpha+\frac{1}{2})u_m^{n+1}-2\alpha u_m^n+(\alpha-\frac{1}{2})u_m^{n-1}\right]\\&+\frac{1}{6\Delta t}\left[(\alpha+\frac{1}{2})u_{m-1}^{n+1}-2\alpha u_{m-1}^n+(\alpha-\frac{1}{2})u_{m-1}^{n-1}\right]\end{aligned}$$

* 本文 1996-12-08 收到

$$=(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\alpha+\beta)a\frac{u_{m+1}^{n+1}-u_{m-1}^{n+1}}{2\Delta t}+(\frac{1}{2}-2\beta)a\frac{u_{m+1}^{n}-u_{m-1}^{n}}{2\Delta x}$$
$$+(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\alpha+\beta)a\frac{u_{m+1}^{n-1}-u_{m-1}^{n-1}}{2\Delta x}, \tag{3}$$

差分格式(3)的实参数偶为非负实数偶．对参数偶(α,β)的不同选取，便可得到不同的差分格式．下面略举差分格式(3)的几个特例．

特例 1 当$\alpha=\frac{1}{2}$，$\beta=0$时为两层六点格式

$$\frac{1}{6\Delta t}(u_{m+1}^{n+1}-u_{m+1}^{n})+\frac{4}{6\Delta t}(u_{m}^{n+1}-u_{m}^{n})+\frac{1}{6\Delta t}(u_{m-1}^{n+1}-u_{m-1}^{n})$$
$$=\frac{a}{2}\frac{u_{m+1}^{n+1}-u_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x}+\frac{a}{2}\frac{u_{m+1}^{n}-u_{m-1}^{n}}{2\Delta x}\qquad\begin{pmatrix}* & * & *\\ * & * & *\end{pmatrix}; \tag{4}$$

特例 2 当$\alpha=0$，$\beta=0$时为三层八点格式

$$\frac{1}{12\Delta t}(u_{m+1}^{n+1}-u_{m+1}^{n-1})+\frac{4}{12\Delta t}(u_{m}^{n+1}-u_{m}^{n-1})+\frac{1}{12\Delta t}(u_{m-1}^{n+1}-u_{m-1}^{n-1})$$
$$=\frac{a}{4}\frac{u_{m+1}^{n+1}-u_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x}+\frac{a}{2}\frac{u_{m+1}^{n}-u_{m-1}^{n}}{2\Delta x}+\frac{a}{4}\frac{u_{m+1}^{n-1}-u_{m-1}^{n-1}}{2\Delta x}\qquad\begin{bmatrix}* & * & *\\ * & & *\\ * & * & *\end{bmatrix}; \tag{5}$$

特例 3 当$\alpha=0$，$\beta=\frac{1}{4}$时为三层六点格式

$$\frac{1}{12\Delta t}(u_{m+1}^{n+1}-u_{m+1}^{n-1})+\frac{4}{12\Delta t}(u_{m}^{n+1}-u_{m}^{n-1})+\frac{1}{12\Delta t}(u_{m-1}^{n+1}-u_{m-1}^{n-1})$$
$$=\frac{a}{2}\frac{u_{m+1}^{n+1}-u_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x}+\frac{a}{2}\frac{u_{m+1}^{n-1}-u_{m-1}^{n-1}}{2\Delta x}\qquad\begin{bmatrix}* & * & *\\ & \cdot & \cdot\\ * & * & *\end{bmatrix}; \tag{6}$$

特例 4 当$\alpha=0$，$\beta=\frac{1}{4}$时为三层九点格式

$$\frac{1}{12\Delta t}(3u_{m+1}^{n+1}-4u_{m+1}^{n}+u_{m+1}^{n-1})+\frac{4}{12\Delta t}(3u_{m}^{n+1}-4u_{m}^{n}+u_{m}^{n-1})$$
$$+\frac{1}{12\Delta t}(3u_{m-1}^{n+1}-4u_{m-1}^{n}+u_{m-1}^{n-1})=a\frac{a}{4}\frac{u_{m+1}^{n+1}-u_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x}\qquad\begin{bmatrix}* & * & *\\ * & * & *\\ * & * & *\end{bmatrix}. \tag{7}$$

2 差分格式的稳定性

为分析差分格式族(3)的稳定性，先叙述如下 Miller 准则[5].

设$f(\lambda)$为复平面上的n次多项式，即$f(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_n\lambda^n(a_0\cdot a_n\neq 0)$，如果定义多项式

$$f^*(\lambda)=\lambda^n f(1/\bar{\lambda}=\bar{a}_n+\bar{a}_{n-1}\lambda+\cdots+\bar{a}_1\lambda^{n-1}+\bar{a}_0\lambda^n$$

及降幂多项式

$$\hat{f}(\lambda)=1/\lambda[f^*(0)f(\lambda)-f(0)f^*(\lambda)],$$

其中 $\bar{a}_j$ 为 $a_j(j=0,1,\cdots,n)$ 的共轭复数．因此，*Miller* 准则为多项式 $f(\lambda)$ 的所有根按模小于等于 1 的充要条件：(1) $|f^*(0)|>|f(0)|$，且 $\hat{f}(\lambda)=0$ 只有按模小于等于 1 的根；(2) $\hat{f}\equiv 0$ 且 $f'(\lambda)=0$ 的所有根按模小于等于 1.

现用 Fourier[4] 分析式(3)的稳定性，令 $u_m^n=\lambda^n e^{im\theta}(i^2=-1,|\theta|<\pi)$，代入式(3)得

$$\begin{aligned}&(\alpha+1/2)F\lambda^2-2\alpha F\lambda+(\alpha-1/2)F\\&=-i(1/4+1/2\alpha+\beta)G\lambda^2-i(1/2-2\beta)G\lambda-i(1/4-1/2\alpha+\beta)G,\end{aligned}\tag{8}$$

其中 $r=a\Delta t/\Delta x$.

$$F=e^{i\theta}+e^{-i\theta}+4=2+4\cos^2\frac{\theta}{2}\geqslant 2>0,\tag{9}$$

$$G=i3r(e^{i\theta}-e^{-i\theta})=-6r\sin\theta,\tag{10}$$

令

$$\begin{aligned}f(\lambda)=&[(\alpha+1/2)F+i(1/4+1/2\alpha+\beta)G]\lambda^2-[2\alpha F-i(1/2-2\beta)G]\lambda\\&+[(\alpha-1/2)F+i(1/4-1/2\alpha+\beta)G]=0,\end{aligned}\tag{11}$$

则

$$f(0)=(\alpha-1/2)F+i(1/4-1/2\alpha+\beta)G\tag{12}$$

$$\begin{aligned}f^*(\lambda)=&[(\alpha-1/2)F-i(1/4-1/2\alpha+\beta)G]\lambda^2-[2\alpha F+i(1/2-2\beta)G]\lambda\\&+[(\alpha+1/2)F-i(1/4+1/2\alpha+\beta)G],\end{aligned}\tag{13}$$

$$f^*(0)=(\alpha+1/2)F-i(1/4+1/2\alpha+\beta)G.\tag{14}$$

由式(12)～(14)，得降幂多项式为

$$\begin{aligned}\hat{f}(\lambda)=&\frac{f^*(0)f(\lambda)-f(0)f^*(\lambda)}{\lambda}\\=&[2\alpha F^2+\alpha(1/2+2\beta)G^2]\lambda-[2\alpha F^2-\alpha(1/2-2\beta)G^2-i2\alpha FG].\end{aligned}\tag{15}$$

下面分两种情况进行讨论．

(1) 当 $\alpha=0$，$\hat{f}(\lambda)\equiv 0$，此时

$$f(\lambda)=[1/2F+i(1/4+\beta)G]\lambda^2+i(1/2-2\beta)G\lambda+[-1/2F+i(1/4+\beta)G],$$

$$f'(\lambda)=2[1/2F+i(1/4+\beta)G]\lambda+i(1/2-2\beta)G\overset{令}{=}0.$$

注意到式(9)，(10)，当 $\beta\geqslant 0$ 时，$f'(\lambda)$ 的根模满足下列关系

$$|\lambda|^2=\frac{[G^2(1/2-2\beta)^2]}{[F^2+(1/2+2\beta)^2G^2]}<1,$$

故 $f'(\lambda)$ 的根模 $|\lambda|<1$. 由 Miller 准则知，$f(\lambda)$ 的根模 $|\lambda|<1$. 从而，当 $\alpha=0$ 时，对任意 $\beta\geqslant 0$，差分格式(3)绝对稳定．

(2) 当 $\alpha>0$ 时，由式(12)及式(14)可知

$$\begin{aligned}|f^*(0)|^2&=|(\alpha+1/2)F-i(1/4+1/2\alpha+\beta)G|^2\\&=(\alpha+1/2)^2F^2+(1/4+1/2+\beta)^2)G^2,\\|f(0)|^2&=|(\alpha-1/2)F+i(1/4-1/2+\beta)G|^2\\&=(\alpha-1/2)^2F^2+(1/4-1/2\alpha+\beta)^2)G^2.\end{aligned}$$

显然，无论 β 为何值，均有 $|f^*(0)|>|f(0)|$. 由式(15)可知，当 $\beta\geqslant 0$ 时，$\hat{f}(\lambda)=0$ 的根

$$|\lambda|^2=|2\alpha F^2-\alpha(1/2-2\beta)G^2-i2\alpha FG/2\alpha F^2+\alpha(1/2+2\beta)G^2|^2\leqslant 1.$$

当 $\beta>0$ 时,上述不等式严格成立;当 $\beta=0$ 时,上述不等式成为等式,但此时 $f(\lambda)$ 只有单根 $|\lambda|=1$. 由 Miller 准则可知,当 $\alpha>0,\beta\geqslant 0$ 时,$f(\lambda)$ 的根模 $|\lambda|\leqslant 1$,且 $|\lambda|=1$ 时只有单根,故差分格式(3)也稳定.

综上所述,便得如下基本定理

定理 对任意非负参数 $\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0$,关于对流方程初值问题(1),差分格式(3)绝对稳定.

本定理的结论,对于对流方程初边值问题也适用.但边界条件应按文[1]给出的才正确,即当 $\alpha<0$ 时应给出左条件 $u(0,t)=f(x)$;而当 $\alpha>0$ 时仅应给出右边界条件 $u(l,t)=f(x)$.

3 截断误差的讨论

若记

$$D_t(\alpha,m) = [(\alpha+1/2)u_m^{n+1} - 2\alpha u_m^n + (\alpha-1/2)u_m^{n-1}]/\Delta x, \tag{16}$$

$$\delta_x(n) = x(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)/2\Delta. \tag{17}$$

设问题(1)的解 $u(x,t)$ 充分光滑,则关系式(2)成立.注意到网格比 $r=a\Delta t/\Delta x$,于网格点 $(m\Delta x,n\Delta t)$ 处进行 Taylor 展开得

$$D_t(\alpha,m) = \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\Delta t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 1/6\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + O(\Delta t^3), \tag{18}$$

$$D_t(\alpha,m+1) + D_t(\alpha,m-1) = 2\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta x^2\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2} + 2\alpha\Delta t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$+ \alpha\Delta t\Delta x^2\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2} + \frac{1}{12}\Delta x^4\frac{\partial^5 u}{\partial t\partial x^4} + \frac{1}{3}\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \mathrm{O}(\Delta \mathrm{t}\Delta \mathrm{x}^2 + \Delta \mathrm{x}^6). \tag{19}$$

所以,差分格式(3)的左端的 Taylor 展开为

$$1/6D_t(\alpha,m+1) + 4/6D_t(\alpha,m) + 1/6D_t(\alpha,m-1) = \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\Delta t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}$$

$$+ \alpha/6\Delta t\Delta x^2\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}1/6\Delta t^2\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + O(\Delta t^3 + \Delta t^2\Delta x^2 + \Delta x^4). \tag{20}$$

又

$$\delta_x(n) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{120}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + O(\Delta x^6), \tag{21}$$

$$\delta_x(n\pm 1) = \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta t\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2} + \frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

$$\pm\frac{\Delta x^2\Delta t}{6}\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial t} + O(\Delta t^3 + \Delta x^2\Delta t^2 + \Delta x^4), \tag{22}$$

所以差分格式(3)的右端的 Taylor 展开为

$$(1/4 + 1/2\alpha + \beta)a\delta_x(n+1) + (\frac{1}{2} - 2\beta)a\delta_x(n) + (1/4 - 1/2\alpha + \beta)a\delta_x(n-1)$$

$$= a\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\Delta ta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} + \frac{a}{6}\Delta x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\alpha}{6}\Delta x^2\Delta ta\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial t}$$

$$+ \frac{1/2 + 4\beta}{2}\Delta t^2 a\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2} + O(\Delta t^3 + \Delta x^2\Delta t^2 + \Delta x^4). \tag{23}$$

从而,差分格式(3)的局部截断误差为式(20)减去式(23),即为

$$(1/6 - \frac{1/2 + 2\beta}{2})\Delta t^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + O(\Delta t^3 + \Delta t^2 \Delta x + \Delta x^4). \tag{24}$$

可见,其局部截断误差为 $O(\Delta t^2+\Delta x^4)$. 但由于网格比 $\frac{\Delta t}{\Delta x}>0$ 为常数,故实质上局部截断误差为 $O(\Delta t^2+\Delta x^2)$. 特别地,若取 $1/6=1/2+2\beta/2$ 则局部截断误差可达 $O(\Delta t^3+\Delta x^4)$. 但此时 $\beta=-1/12$ 不满足稳定性条件,因此逼近阶不可能更高了.

4 数值例子

考虑对流方程初边值问题

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \ (0 < x < 12), \\ &u(x,0) = x^3 (0 \leqslant x \leqslant 12), \\ &u(0,t) = -t^3 (t > 0), \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

其精确解为

$$u(x,t) = (x-t)^3. \tag{26}$$

此时 $a=-1$,取 $\Delta t=0.4$,$\Delta x=0.5,0.25,0.125$(即 $|r|=\Delta t/\Delta x=0.8,1.6,3.2$)按格式(4),(5),(6)计算得 $n=1\ 000$(即 $t=400$)并与精确解列表 1~3 比较(表 1,2 和 3 的单位分别为 $10,10^7$ 和 10^7). 数值例子表明理论分析的正确性,我们的格式是有效的.

(1) 由于本文所构造的格式为三层格式,故除初始层网格函数值已知外,还需先用其他方法计算第 1 层网格函数值. 这里为方便计,按精确值进行第 1 层网格函数值的计算.

(2) 除左边界条件按已知条件处理外,还必须小心处理右边的附加边界条件. 这里我们依照文〔1〕用逆风格式处理右边($x=12$)边界. 因篇幅关系,从略.

表 1 $\Delta t=0.4,\Delta x=1/2,r=-0.8,n=1\ 000$

x	精确解	格式(4)	格式(5)	格式(6)
0.0	0	0	0	0
2.0	−6.304 480	−6.304 480	−6.304 478	−6.304 479
4.0	−6.209 914	−6.209 414	−6.209 919	−6.209 914
6.0	−6.116 299	−6.116 299	−6.116 298	−6.116 299
8.0	−6.023 629	−6.023 630	−6.023 630	−6.023 629
10.0	−5.931 900	−5.931 900	−5.931 897	−5.931 900
12.0	−5.841 108	−5.841 108	−5.841 102	−5.841 107

表 2 $\Delta t=0.4,\Delta x=1/4,r=-1.6,n=1\ 000$

x	精确解	格式(4)	格式(5)	格式(6)
0.0	0	0	0	0
2.0	−6.304 480	−6.304 479	−6.304 475	−6.304 479
4.0	−6.209 914	−6.209 914	−6.209 912	−6.209 914
6.0	−6.116 299	−6.116 299	−6.116 299	−6.116 299
8.0	−6.023 629	−6.023 630	−6.023 632	−6.023 629
10.0	−5.931 900	−5.931 900	−5.931 902	−5.931 900
12.0	−5.841 108	−5.841 107	−5.841 109	−5.841 107

表 3 $\Delta t=0.4, \Delta x=1/8, r=-3.2, n=1\ 000$

x	精确解	格式(4)	格式(5)	格式(6)
0.0	0	0	0	0
2.0	−6.304 480	−6.268 714	−6.304 464	−6.304 479
4.0	−6.209 914	−6.138 634	−6.209 917	−6.209 914
6.0	−6.116 299	−6.009 755	−6.116 292	−6.116 299
8.0	−6.023 629	−5.882 068	−6.023 635	−6.023 629
10.0	−5.931 900	−5.755 567	−5.931 899	−5.931 900
12.0	−5.841 108	−5.630 249	−5.841 105	−5.841 107

本文为校科研基金资助项目.

参考文献

1 陆金甫,关 治.偏微分方程数值解法.北京:清华大学出版社,1987.50~132

2 朱幼兰,钟锡昌,陈炳木等.初边值问题差分方法及绕流.北京:科学出版社,1980.25~67

3 陈材侃.计算流体力学.重庆:重庆出版社,1992.1~62

4 Richtmyer R D, Morton K W. Difference methods for initial-value problems. 2nd ed. New York: Wiley., 1967.36~108

5 Miller J J H. On the location of zeros of certain classes of polynomials with application to numerical analysis. J. Inst. Math. Appls., 1971, 8:394~406

A Class of New Steady Difference Schemes for Convective Equation

Zeng Wenping

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract A class of new three-layer difference schemes containing biparameters are constructed for convective equation $U_t=aU_x$. A double-layer scheme will be obtained in case $\alpha=1/2, \beta=0$. These schemes are all absolutely stable for arbirarily nonnegative parameters, with local truncation error of $O(\Delta t^2+\Delta x^4)$.

Keywords convective equation, difference scheme, absolutely stable