第 18 卷 第 3 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 18 No. 3
1997 年 7 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jul. 1997

一个造血模型周期解的稳定性*

王 全 义

(华侨大学管理信息科学系，泉州 362011)

摘要　研究一个造血模型周期解的稳定性问题，得到了一些周期解的稳定性的新结果．

关键词　微分积分方程，无穷时滞，周期解，稳定性

分类号　O 175.6

文〔1〕研究了一个具有无穷时滞的造血模型

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}=-r(t)N(t)+\alpha(t)\int_0^{+\infty}K(s)\exp(-\beta(t)N(t-s))\mathrm{d}s \tag{1}$$

的周期解的存在性、稳定性等问题．其中 $t\in R$，$\alpha(t)$，$\beta(t)$，$r(t)$ 都是 R 上严格正的有界周期函数，它们有共同的周期 ω；$K(t):R^+\to R^+$ 是分段连续滞后核，最终非增并且满足

$$\int_0^{+\infty}K(s)\mathrm{d}s=1. \tag{2}$$

在文〔2〕中，我们研究了方程(1)的正 ω-周期解的存在性和唯一性等问题，所得结果推广了文〔1〕中的有关结果．本文将研究方程(1)的正 ω-周期解的唯一性和稳定性等问题，得到了一些新结果，且推广了文〔1〕的有关结果．

1　正 ω-周期解的一致稳定性

在本文中，仍与文〔2〕一样，假定下列条件成立：

$r(t)$，$\beta(t)$ 是 R 上非负的连续 ω-周期函数且

$$\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}r(t)\mathrm{d}t=r_1>0, \tag{3}$$

其中 $K(t)$，$\alpha(t)$ 仍如前面所述．令

$$m_1=\inf\{\exp(-\int_s^t[r(\tau)-r_1]\mathrm{d}\tau):0\leqslant s\leqslant t\leqslant\omega\}, \tag{4}$$

$$M_1=\sup\{\exp(-\int_s^t[r(\tau)-r_1]\mathrm{d}\tau):0\leqslant s\leqslant t\leqslant\omega\}, \tag{5}$$

$$M_2=\sup\{\exp(\int_s^t[r(\tau)-r_1]\mathrm{d}\tau):0\leqslant s\leqslant t\leqslant\omega\}, \tag{6}$$

* 本文 1996-12-04 收到；福建省自然科学基金和国务院侨办科研基金的资助项目

$$m_2 = \inf\{\exp(\int_s^t [r(\tau) - r_1]d\tau) : 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \omega\}. \tag{7}$$

由于

$$\exp(-\int_s^t r(\tau)d\tau) = \exp(-r_1(t-s)) \cdot \exp(-\int_s^t [r(\tau) - r_1]d\tau), \tag{8}$$

所以,由式(4)～(7)得

$$m_1\exp(-r_1(t-s)) \leqslant \exp(-\int_s^t r(\tau)d\tau) \leqslant M_1\exp(-r_1(t-s)) \ (t \geqslant s), \tag{9}$$

用 r_2,r_0 分别表示 $r(t)$ 的上确界和下确界,则又有

$$\exp(-r_2(t-s)) \leqslant \exp(-\int_s^t r(\tau)d\tau) \leqslant \exp(-r_0(t-s)) \ (t \geqslant s), \tag{10}$$

用 β_1,β_2 分别表示 $\beta(t)$ 的上确界和下确界;用 α_1,α_2 分别表示 $\alpha(t)$ 的上确界和下确界.

设方程(1)的解 $N(t)$ 满足下列初始条件

$$\left.\begin{aligned} &N(s) = \varphi(s), s \in (-\infty, t_0], \\ &\varphi(t_0) > 0, \varphi(s) \in \Phi, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

其中 $\Phi = \{\varphi(s) : \varphi(s) \in C(-\infty, t_0], R_+), \|\varphi\| = \sup\{|\varphi(s)| : s \in (-\infty, t_0]\} \leqslant M\}$,这里 $M > 0$ 为常数.

由常数变易法可得,方程(1)满足初始条件(11)的解 $N(t)$ 可表示为

$$\begin{aligned} N(t) = &\exp(-\int_{t_0}^t r(\tau)d\tau)N(t_0) + \int_{t_0}^t \exp(-\int_u^t r(\tau)d\tau)a(u) \\ &\times \int_0^{+\infty} K(s)\exp(-\beta(u)N(u-s))dsdu \ (t \geqslant t_0), \end{aligned} \tag{12}$$

从而方程(1)满足初始条件(11)的解在 $t \geqslant t_0$ 上存在且是正解.

由于问题的实际意义,因此下面我们只研究方程(1)的正 ω-周期解的唯一性及稳定性问题.

由文[2]中定理2知,方程(1)存在着正 ω-周期解 $N_0(t)$ 满足

$$n_1 \leqslant N_0(t) \leqslant n_2, (t \in R), \tag{13}$$

其中 $n_2 = \frac{\alpha_1 M_1}{r_1}$,$n_1 = \frac{m_1\alpha_2\exp(-\beta_2 n_2)}{r_1}$.

定理1 若 $r_1 > M_1\alpha_1\beta_1\exp(-\beta_2 n_1)$,则方程(1)的正 ω-周期解 $N_0(t)$ 是一致稳定的.

证 因为 $r_1 > M_1\alpha_1\beta_1\exp(-\beta_2 n_1)$,故存在着 $d > 0$ 充分小,使得

$$r_1 > M_1\alpha_1\beta_1\exp(-\beta_2(n_1 - d)) \tag{14}$$

成立.

设 $N(t)$ 是方程(1)满足初始条件(11)的任一正解.于是 $N(t)$,$N_0(t)$ 都可由式(12)给出.对于任意给定 $\varepsilon > 0$(特别 $\varepsilon < \frac{d}{2}$),存在着正数

$$\delta = \min\{\frac{d}{2}, \frac{\varepsilon}{2M_1 r_1}(r_1 - M_1\alpha_1\beta_1\exp(-\beta_2(n_1 - \frac{d}{2}))), \frac{\varepsilon}{2}\},$$

使得当

$$|\varphi(s) - N_0(s)| < \delta \ (-\infty < s \leqslant t_0) \tag{15}$$

时就有

$$|N(t) - N_0(t)| < \varepsilon \ (t \geqslant t_0); \tag{16}$$

否则的话，必有 $t_1 > t_0$ 使得

$$|N_0(t) - N(t)| < \varepsilon \ (t_0 \leqslant t < t_1) \tag{17}$$

及

$$|N_0(t_1) - N(t_1)| = \varepsilon, \tag{18}$$

从而有

$$|N_0(t) - N(t)| \leqslant \varepsilon \ (-\infty < t \leqslant t_1), \tag{19}$$

$$n_1 - \frac{d}{2} < N(t) < n_2 - \frac{d}{2} \ (-\infty < t \leqslant t_1). \tag{20}$$

由于

$$\begin{aligned} N_0(t_1) - N(t_1) = &\exp\left(-\int_{t_0}^{t_1} r(\tau)\mathrm{d}\tau\right)[N_0(t_0) - N(t_0)] + \int_{t_0}^{t_1} \exp\left(-\int_u^{t_1} r(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \\ &\times a(u)\int_0^{+\infty} K(s)[\exp(-\beta(u)N_0(u-s)) \\ &- \exp(-\beta(u)N(u-s))]\mathrm{d}s\mathrm{d}u \\ = &\exp\left(-\int_{t_0}^{t_1} r(\tau)\mathrm{d}\tau\right)[N_0(t_0) - N(t_0)] + \int_{t_0}^{t_1} \exp\left(-\int_u^{t_1} r(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \\ &\times a(u)\int_0^{+\infty} K(s)\exp(-\beta(u)y(u-s))\beta(u) \\ &\times [N_0(u-s) - N(u-s)]\mathrm{d}s\mathrm{d}u, \end{aligned} \tag{21}$$

其中 $y(t)$ 在 $N_0(t)$ 及 $N(t)$ 之间；从而有 $n_1 - \frac{d}{2} < y(t) < n_2 - \frac{d}{2}$，$(-\infty < t \leqslant t_1)$. 于是，由式(9)和式(19)～(21)可得

$$\begin{aligned} \varepsilon = |N_0(t_1) - N(t_1)| &\leqslant M_1\exp(-r_1(t_1 - t_0))\delta \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} M_1\exp(-r_1(t_1 - u))\alpha_1\int_0^{+\infty} K(s)\exp\left(-\beta_2\left(n_1 - \frac{d}{2}\right)\right)\cdot\beta_1\varepsilon\mathrm{d}s\mathrm{d}u \\ &\leqslant M_1\exp(-r_1(t_1 - t_0))\delta + \frac{1}{r_1}M_1\alpha_1\beta_1\exp\left(-\beta_2\left(n_1 - \frac{d}{2}\right)\right) \\ &\quad \times \varepsilon(1 - \exp(-r_1(t_1 - t_0))) \\ &< M_1\delta + \frac{1}{r_1}\cdot M_1\alpha_1\beta_1\exp\left(-\beta_2\left(n_1 - \frac{d}{2}\right)\right)\varepsilon \\ &\leqslant M_1\left(r_1 - M_1\alpha_1\beta_1\exp\left(-\beta_2\left(n_1 - \frac{d}{2}\right)\right)\right)\cdot\frac{\varepsilon}{2M_1r_1} \\ &\quad + \frac{1}{r_1}\cdot M_1\alpha_1\beta_1\exp\left(-\beta_2\left(n_1 - \frac{d}{2}\right)\right)\varepsilon \\ &< \varepsilon, \end{aligned} \tag{22}$$

这就发生了矛盾．这个矛盾说明了 $t \geqslant t_0$ 时，式(16)成立．由于 δ 只与 ε 有关而与 t_0 无关，因此方程(1)的正 ω-周期解是一致稳定的．定理 1 证毕．

显然，如果 $r(t)$ 是正 ω-周期函数，且 $r(t)$ 的最小值和最大值分别是 r_0 和 r_2，则由式(10)及

定理1的证明可以得到下列推论.

推论1　若$r(t)$是正ω-周期函数,且$r_0>\alpha_1\beta_1\exp(-\beta_2 n_1)$,则方程(1)的正$\omega$-周期解$N_0(t)$是一致稳定的.

注1　显然当r_0充分小时,即当$r_0<\frac{r_1}{M_1}$时且条件$r_0>\alpha_1\beta_1\exp(-\beta_2 n_1)$不成立,此时,推论1无法判别方程(1)的正$\omega$-周期解的一致稳定性,但可用定理1加以判别.

2　正ω-周期解的一致渐近稳定性

记$M_0=\max\{M_1,M_2\}$.于是我们有

定理2　如果下列条件

(Ⅰ)$r_1>M_0\alpha_1\beta_1\exp(-\beta_2 n_1)$;(Ⅱ)$\int_0^{+\infty}K(s)s\mathrm{d}s<+\infty$成立,则方程(1)的正$\omega$-周期解$N_0(t)$是一致渐近稳定的.

证　由条件(Ⅰ)可知,此时定理1的条件成立,因此由定理1可知方程(1)的正ω-周期解$N_0(t)$是一致稳定的.

设$N(t)$是方程(1)满足初始条件(11)的任一正解.设$d>0$,使得$r_1>M_0\alpha_1\beta_1\exp(-\beta_2(n_1-d))$成立.由定理1,对充分小的正数$\varepsilon(<\frac{d}{2})$,可选取正数$\delta(<\frac{d}{2})$充分小,使得当

$$|N(s)-N_0(s)|<\delta\ (s\in(-\infty,t_0]) \tag{23}$$

时,就有

$$|N(t)-N_0(t)|<\varepsilon\ (t\geqslant t_0). \tag{24}$$

于是由式(23),(24)可得

$$n_1-\frac{d}{2}<N(t)<n_2-\frac{d}{2}\ (t\in R). \tag{25}$$

现令$z(t)=N(t)-N_0(t)(t\in R)$,则有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=&-r(t)z(t)+\alpha(t)\int_0^{+\infty}K(s)[\exp(-\beta(t)N(t-s))\\&-\exp(-\beta(t)N_0(t-s))]\mathrm{d}s\ (t\geqslant t_0).\end{aligned} \tag{26}$$

定义一个李雅普诺夫函数如下

$$\begin{aligned}V(t)=&|z(t)|\exp(\int_0^t[r(\tau)-r_1]\mathrm{d}\tau)+\int_0^{+\infty}K(s)\{\int_{t-s}^t\alpha(u+s)\\&\times\exp(\int_0^{u+s}[r(\tau)-r_1]\mathrm{d}\tau)|\exp(-\beta(u+s)N(u))\\&-\exp(-\beta(u+s)N_0(u))|\mathrm{d}u\}\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{27}$$

由条件(Ⅱ)可以证明式(27)中的积分对$t\in[t_0,+\infty)$是一致收敛的,因此$V(t)$是连续且它的Dini右上导数存在,沿着式(26)的解计算$V(t)$的Dini右上导数得

$$\begin{aligned}D^+V(t)=&\mathrm{sgn}[z(t)]\{-r(t)z(t)+\alpha(t)\\&\times\int_0^{+\infty}K(s)[\exp(-\beta(t)N(t-s))-\exp(-\beta(t)N_0(t-s))]\mathrm{d}s\}\\&\times\exp(\int_0^t[r(\tau)-r_1]\mathrm{d}\tau+(r(t)-r_1)\exp(\int_0^t[r(\tau)-r_1]\mathrm{d}\tau)|z(t)|\end{aligned}$$

$$+\int_0^{+\infty}K(s)\exp(\int_0^{t+s}[r(\tau)-r_1]d\tau)\alpha(t+s)|\exp(-\beta(t+s)N(t))$$

$$-\exp(-\beta(t+s)N_0(t))|ds-\alpha(t)\exp(\int_0^t[r(\tau)-r_1]d\tau)$$

$$\times\int_0^{+\infty}K(s)|\exp(-\beta(t)N(t-s))-\exp(-\beta(t)N_0(t-s))|ds$$

$$\leqslant -r_1|z(t)|\exp(\int_0^t[r(\tau)-r_1]d\tau)$$

$$+\alpha_1\exp\int_0^t[r(\tau)-r_1)d\tau)\int_0^{+\infty}K(s)\exp(\int_0^{t+s}[r(\tau)-r_1]d\tau)$$

$$\times\exp(-\beta(t+s)y(t))\beta(t+s)\cdot|z(t)|ds, \tag{28}$$

其中 $y(t)$ 在 $N(t)$ 及 $N_0(t)$ 之间. 因此当 $t\in R$ 时，$n_1-\frac{d}{2}<y(t)<n_2-\frac{d}{2}$. 于是有

$$D^+V(t)\leqslant -r_1|z(t)|\exp(\int_0^t[r(\tau)-r_1]d\tau)+\alpha_1\beta_1M_0\exp(-\beta_2$$

$$\times(n_1-\frac{d}{2}))\int_0^{+\infty}K(s)ds|z(t)|\exp(\int_0^t[r(\tau)-r_1]d\tau)$$

$$\leqslant -[r_1-\alpha_1\beta_1M_0\exp(-\beta_2(n_1-\frac{d}{2}))m_2|z(t)|\ (t\geqslant t_0). \tag{29}$$

在 $[t_0,t]$ 上积分上式得

$$V(t)+[r_1-\alpha_1\beta_1M_0\exp(-\beta_2(n_1-\frac{d}{2}))]m_2\int_{t_0}^t|z(s)|ds\leqslant V(t_0)\ (t\geqslant t_0), \tag{30}$$

由于 $r_1-\alpha_1\beta_1M_0\exp(-\beta_2(n_1-\frac{d}{2}))>0$，故由上式可知 $z(t)\in L[t_0,+\infty]$. 又因为 $|z(t)|$ 有界，故由式(26)可知 $\frac{dz(t)}{dt}$ 有界，所以 $z(t)$ 在 $[t_0,+\infty)$ 上一致连续，从而由文〔3〕Barbalat 引理得 $\lim\limits_{t\to+\infty}z(t)=0$，即方程(1)的正 ω-周期解 $N_0(t)$ 是一致渐近稳定的.

如果 $r(t)$ 是正 ω-周期函数且 r_0 是它的最小值，并在定理 2 的证明中取

$$V(t)=|z(t)|+\int_0^{+\infty}K(s)\{\int_{t-s}^t\alpha(u+s)|\exp(-\beta(u+s)N(u))$$

$$-\exp(-\beta(u+s)N_0(u))|du\}ds, \tag{31}$$

再如定理 2 中的证明那样，我们有下列推论.

推论 2　如果下列条件

(Ⅰ) $r_0>\alpha_1\beta_1\exp(-\beta_2n_1)$；(Ⅱ) $\int_0^{+\infty}K(s)sds<+\infty$ 成立，则方程(1)的正 ω-周期解 $N_0(t)$ 是一致渐近稳定的.

3　正 ω-周期解的唯一性

设 $N(t)$ 是方程(1)满足初始条件(11)的任一正解. 于是由文〔2〕定理 1 可知，存在 $T>0$ 充分大使得当 $t\geqslant T$ 时，$N_1<N(t)<N_2$，其中 $N_2=\frac{M_1\alpha_1}{r_1}+b$，$N_1=\frac{1}{r_1}m_1\alpha_2b_1\exp(-\beta_1N_2)$. 显然 $N_1<n_1$，$N_2>n_2$. 特别地从定理 1[2] 的证明中可以看出，b 可以充分接近于 0，b_1 可以充分地接近于 1，从而可以使得 N_1 充分接近于 n_1，N_2 充分接近于 n_2. 因此，如果 $r_1>M_0\alpha_1\beta_1\exp(-\beta_2n_1)$ 成

立，也就有 $r_1 > M_0\alpha_1\beta_1\exp(-\beta_2 N_1)$ 成立．于是在定理2的证明中，注意到式(29)可写为

$$D^+ V(t) \leqslant -[r_1 - \alpha_1\beta_1 M_0 \exp(-\beta_2 N_1)]m_2 |z(t)| \quad (t \geqslant T), \tag{32}$$

若在 $[T,t]$ 上积分上式得

$$V(t) + [r_1 - \alpha_1\beta_1 M_0 \exp(-\beta_2 N_1)]m_2 \int_T^t |z(s)| \mathrm{d}s \leqslant V(T) \quad (t \geqslant T).$$

再如定理2最后的证明那样可以证得 $\lim\limits_{t\to+\infty} z(t) = 0$，其中 $z(t) = N(t) - N_0(t)$，$t \in R$．即方程(1)的一切正解逼近于正 ω-周期解 $N_0(t)$．由此可知 $N_0(t)$ 是方程(1)唯一的正 ω-周期解且对于初始条件(11)而言是全局一致渐近稳定的．综上所述，我们有下列定理．

定理3　如果定理2中的条件成立，则方程(1)存在着唯一的、全局一致渐近稳定的正 ω-周期解．

同样地，我们有

推论3　如果推论2中的条件成立，则方程(1)存在着唯一的、全局一致渐近稳定的正 ω-周期解．

注2　显然推论3的结果推广了文〔1〕中的定理4.1的结果．

参　考　文　献

1　翁佩萱，梁妙莲．一个造血模型周期解的存在性及其性态．应用数学，1995，8(4)：434～439

2　王全义．一个造血模型的周期解的存在性及唯一性．华侨大学学报(自然科学版)，1997，17(1)：11～15

3　Barbalat I．System d'equations differentialles d'oscillations nonlinear．Rov．Roumaine Math．Pures Appl.，1959，(4)：261～270

Stability of Periodic Solution to a Hematopoiesis Model

Wang Quanyi

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract　A study is made on the stability of periodic solution to a hematopoiesis model. New results on the stability of periodic solution to this equation are obtained.

Keywords　integrodifferential equation, infinite time delay, periodic solution, stability