第18卷 第2期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.18 No.2
1997年4月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Apr. 1997

一种确定最优组合投资权重的新方法*

程 细 玉

(华侨大学管理信息科学系,泉州 362011)

摘要 采用了单位收益最小风险的非线性目标函数,精确地确定了最优组合投资的权重.在理论和实际上都有较明显的直观意义.

关键词 组合投资,最小风险,单位收益

分类号 O 29; F 224.31

设一个金融机构可以选择的风险资产有 n 种,每种资产的收益率为 $r_i(i=\overline{1,n})$,则 r_i 可看成是随机变量.其均值 E_i 是资产 i 的预期收益率,标准差 σ_i 表示实际收益率对预期收益率的平均偏离.设这 n 种风险资产的持有比例 $\omega_i(i=1,2,\cdots,n)$,则其资产组合的预期收益率及标准差为 $E=\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_iE_i$、$\sigma=(\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\omega_i\omega_j)^{\frac{1}{2}}$.其中 σ_{ij} 表示第 i 种资产预期收益和第 j 种资产预期收益的协方差$(i\neq j)$.$\sigma_{ii}=\sigma_i^2(i=\overline{1,n})$.

根据以上假定,通常的组合投资决策模型为

$$\min\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\omega_i\omega_j,\ \max E=\sum_{i=1}^{n}\omega_iE_i,\ \sum^{i}\omega_i=1,\ \omega_i\geqslant 0\ (i=\overline{1,n}). \tag{1}$$

在模型(1)中,E_i 及 σ_{ij} 都可由历史资料按通常的样本矩进行估计,故模型(1)实质上是一个多目标非线性规则,一般情况下的求解是极其困难的.故人们常对两目标函数中的一个进行某种限制,以期求出最优组合或近似最优组合(确切地说应该是后者).例如 Markowity 模型,$\min\sigma^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\omega_i\omega_j$, s.t. $E\geqslant E_0$, $\sum\limits^{i}\omega_i=1\ (\omega_i\geqslant 0)$,即在最起码的收益 E_0 下求风除最小的投资组合.在风险性投资中,主观地确定 E_0 显然是不尽合理的.当 E_0 太大时,有可能出现无解,当 E_0 太小时,则可以能出现与实际最优投资相差太多的情形.

1 原理和方法

在风险和收益中寻找合理平衡的一种方法是力图使单位收益的风险达到最小,即

$$\left.\begin{aligned}&\min(\sigma^2/E)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\omega_i\omega_j\Big/\sum_{i=1}^{n}\omega_iE_i,\\&\text{s.t. }\sum\omega_i=1,\ \omega_i\geqslant 0\ (i=\overline{1,n}).\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

在模型(2)中,因为追求目标函数最小化,故分母包含了让收益尽可能大的信息,分子则包含了

* 本文 1996-12-23 收到

风险尽可能小的信息．从表达式来看，其实质是在投资决策中，让单位收益的风险达到最小．也就是说，投资者愿意冒风险，但也力求在他所谓的风险里，使收益达到最大．关于这一点只要把目标函数中的分子和分母的位置对调一下，然后让目标函数最大化即可得到．

不失一般性，我们假定 $E\geqslant 0$（否则，投资机构就失去了投资的兴趣），故模型(2)等价于

$$\left.\begin{aligned}&\min(\ln\sigma^2-\ln E)=\ln\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\omega_i\omega_j\sigma_{ij}-\ln\sum_{i=1}^n\omega_iE_i,\\&\text{s.t.}\ \sum_i\omega_i=1,\ \omega_i\geqslant 0\ (i=\overline{1,n}).\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

为求解式(3)，利用通常的拉格朗日数乘法，即 $L=\ln\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\omega_i\omega_j\sigma_{ij}-\ln\sum_{i=1}^n\omega_iE_i+\lambda(\sum_{i=1}^n\omega_i-1)$，则式(3)的解必须满足一阶条件 $\partial L/\partial\omega_q=0,\partial L/\partial\lambda=0$，从而得到 $2\sum_{j=1}^n\sigma_{qj}\omega_j/\sum_{i=1}^n\sum_{i=1}^n\omega_i\omega_j\sigma_{ij}-E_q/\sum_{i=1}^n\omega_iE_i+\lambda=0\ (q=1,2,\cdots,n)$，$\sum_i\omega_i=1$. 故对于任意的 $l\neq k(l,k=1,2,\cdots,n)$均有

$$2\sum_{j=1}^n\sigma_{lj}\omega_j/\sum_{i=1}^n\sum_{i=1}^n\omega_i\omega_j\sigma_{ij}-E_l/\sum_{i=1}^n\omega_iE_i+\lambda=0,\tag{4}$$

$$2\sum_{j=1}^n\sigma_{kj}\omega_j/\sum_{i=1}^n\sum_{i=1}^n\omega_i\omega_j\sigma_{ij}-E_k/\sum_{i=1}^n\omega_iE_i+\lambda=0.\tag{5}$$

由式(4)，(5)可得

$$(E_k-E_l)/\sum_{i=1}^n\omega_iE_i=2\sum_{j=1}^n(\sigma_{kj}-\sigma_{lj})\omega_j/\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\omega_i\omega_j\sigma_{ij}.\tag{6}$$

当 $E_k-E_l\neq 0$ 时，则

$$\sum_{j=1}^n\frac{\sigma_{kj}-\sigma_{lj}}{E_k-E_l}\omega_j=\frac{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\omega_i\omega_j\sigma_{ij}}{2\sum_{i=1}^n\omega_iE_i}.\tag{7}$$

注意到式(7)的右端与 k,l 无关，令 $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\omega_i\omega_j\sigma_{ij}/2\sum_{i=1}^n\omega_iE_i=2c$. c 为未知参数，$2c$ 对应于模型(2)的最小风险，故由式(2)可得

$$\sum_{j=1}^n\frac{\sigma_{kj}-\sigma_{lj}}{E_k-E_l}\omega_j=c\quad(E_k\neq E_l,\ k\neq l,\ k,l=1,2,\cdots,n).\tag{8}$$

在式(8)中，令 k,l 变动，则我们将得到 $n(n-1)$个方程，显见它们只蕴含 $n-1$ 个独立的方程(即固定某个 k，然后让 l 变动所得到的 $n-1$ 个方程). 以下不妨设 $k=1$，$l=2,3,\cdots,n$，则由式(8)得

$$\sum_{j=1}^n(\frac{\sigma_{1j}-\sigma_{lj}}{E_1-E_l})\omega_j=c\quad(E_1\neq E_l,\ l\neq 2,3,\cdots,n).\tag{9}$$

由式(9)确定了 $n-1$ 个方程，它们与 $\sum_{j=1}^n\omega_j=1$ 共组成了 n 个方程，总共有 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 及 c 等 $n+1$ 个待定的未知数，由于 $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\omega_i\omega_j\sigma_{ij}/\sum_{i=1}^n\omega_iE_i=2c$，若$(\omega_1^*,\ \omega_2^*,\cdots,\omega_n^*)$是模型(3)的解，则必有

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^n(\frac{\sigma_{1j}-\sigma_{lj}}{E_1-E_l})\omega_j^*=c,\ \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\omega_i^*\omega_j^*\sigma_{ij}/\sum_{i=1}^n\omega_i^*E_i=2c,\\&\sum_{j=1}^n\omega_j^*=1,\ \omega_j^*\geqslant 0\ (E_1\neq E_l,\ l\neq 2,3,\cdots,n),\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

直接求解这个方程组将是十分困难的．作变换 $\omega_i'=\omega_i^*/c\ (i=\overline{1,n})$，则 $\omega_i^*=c\omega_i'$. 此时

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\sigma_{1j}-\sigma_{lj}}{E_1-E_l}\right)\omega_j^* = c \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\sigma_{1j}-\sigma_{lj}}{E_1-E_l}\right)\omega_j' = 1,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\omega_j^* = 1 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n}\omega_j' = \frac{1}{c},$$

注意到 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_i^*\omega_j^*\sigma_{ij}/\sum_{i=1}^{n}\omega_i^*E_i=2c$ 等价于 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_i'\omega_j'\sigma_{ij}/\sum_{i=1}^{n}\omega_i'E_i=2c$，故 ω_1'，ω_2'，$\cdots$，ω_n' 必将满足

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\sigma_{1j}-\sigma_{lj}}{E_1-E_l}\right)\omega_j' = 1\ (l=2,3,\cdots,n),\ E_1\neq E_l,\\ &\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_i'\omega_j'\sigma_{ij} = 2\sum_{i=1}^{n}\omega_i'E_i,\ \omega_i'\geqslant 0\quad (i=\overline{1,n}).\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

模型(10)由 $n-1$ 个线性方程和一个二次方程组成，利用计算机可以在一般的情况下求解．

此时，若$(\omega_1',\omega_2',\cdots,\omega_n')$是(10)的解，令 $c_0=1/\sum_{i=1}^{n}\omega_i'$，$\omega_i^*=c_0\omega_i'(i=\overline{1,n})$，则有 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i^*=1$，$\omega_i^*\geqslant 0$ 且$(\omega_1^*，\omega_2^*，\cdots，\omega_n^*)$是模型(2)的解．

下面我们就模型(10)的解，作几点说明.

(1) 若存在 E_m 使 $E_m=E_1$，则对应于式(6)的结果有 $\sum_{j=1}^{n}(\sigma_{1j}-\sigma_{mj})\omega_j=0$. 此时，只要把模型(10)中相对应的式子改成 $\sum_{j=1}^{n}(\sigma_{1j}-\sigma_{mj})\omega_j'=0$ 即可.

(2) 若 $\omega_0^*=(\omega_{10}^*,\omega_{20}^*,\cdots,\omega_{n0}^*)$是模型(2)解，假定它不是模型(1)的有效解，则必有另一个 $\omega_1^*=(\omega_{11}^*,\cdots,\omega_{n1}^*)$，使 $\sum_{i=1}^{n}\omega_{i1}^*E_i>\sum_{i=1}^{n}\omega_{i0}^*E_i$ 且 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\omega_{i1}^*\omega_{j1}^*<\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\omega_{i0}^*\omega_{j0}^*$，即 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\omega_{i1}^*\omega_{j1}^*/\sum_{i=1}^{n}\omega_{i1}^*E_i<\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\omega_{i0}^*\omega_{j0}^*/\sum_{i=1}^{n}\omega_{i0}^*E_i$. 这与 ω_0^* 是模型(2)的解矛盾，故 ω_0^* 是模型(1)的有效解.

(3) 令 $A=(\sigma_{ij})_{n\times n}$，$R=(R_{ej})_{(n-1)\times n}$，$R_{lj}=\dfrac{(\sigma_{1j}-\sigma_{lj})}{(E_1-E_l)}(l=2,3,\cdots,n，j=1,2,\cdots,n，E_1\neq E_l)$，$X=(\omega_1',\cdots,\omega_n')^{\mathrm{T}}$，$E=(E_1,E_2,\cdots,E_n)^{\mathrm{T}}$，$P=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，则模型(10)化为

$$RX=P;\ X^{\mathrm{T}}AX=2X^{\mathrm{T}}E;\ X\geqslant 0.$$

若 R 是满秩的，即 R 有一个$(n-1)\times(n-1)$的满秩矩阵，则可从 $RX=P$ 与 $X^{\mathrm{T}}AX=2X^{\mathrm{T}}E$ 解出符合条件的唯一解．若 $\mathrm{Rank}(R)<n-1$，则符合条件的解不止一个，这可以解释为某一个或几个风险投资事实上可以由其它投资所代替(线性组合)，这种情形就象股票投资中的板块. 当遇到这种情况时，我们总可以通过适当的选择(如在不同的‘板块’中选择项目)使所得到的 R 是满秩的．

2 实例计算

本节利用前面介绍的方法计算某金融机构资产组合的最优结构．根据历史资料，计算得预期收益率、标准差和协方差的估计值如下

$E_1=0.23$，$\sigma_1=0.21$，$\sigma_{11}=0.044\,1$，$\sigma_{21}=\sigma_{12}$，$\sigma_{31}=\sigma_{13}$；

$E_2=0.24$，$\sigma_2=0.24$，$\sigma_{12}=0.022\,18$，$\sigma_{22}=0.057\,6$，$\sigma_{32}=\sigma_{23}$；

$E_3=0.10$，$\sigma_2=0.08$，$\sigma_{13}=0.000\,8$，$\sigma_{23}=0.001\,34$，$\sigma_{33}=0.006\,4$.

对应于模型(10)的问题为

$$\begin{cases} -2.192\omega_1' + 3.542\omega_2' + 0.054\omega_3' = 1, \\ 0.333\omega_1' + 0.16\omega_2' - 0.043\omega_3' = 1, \\ 0.0441\omega_1'^2 + 0.04436\omega_1'\omega_2' + 0.0016\omega_1'\omega_3' + 0.00576\omega_2'^2 \\ \qquad + 0.00268\omega_2'\omega_3' + 0.0064\omega_3'^2 = 0.46\omega_1' + 0.48\omega_2' + 0.20\omega_3', \\ \omega_1', \omega_2', \omega_3' \geqslant 0 \end{cases}$$

解得：$\omega_1'=5.85$，$\omega_2'=3.383$，$\omega_3'=34.66$. 故 $c_0=0.0228$，$\omega_1^*=0.133$，$\omega_2^*=0.077$，$\omega_3^*=0.79$. 此时单位收益的风险为 $2c_0=0.0456$.

从计算结果看，风险明显降低，在实际中如果能结合一些具体收益较高的风险投资进行决策效果将会更加.

参　考　文　献

1　薛沛丰. 风险投资权函数模型及其最优权重的选择. 数量经济技术经济研究，1995，(11)：56～58

2　唐小我. 组合证券投资的风险分析. 数量经济技术经济研究，1992，(5)：24～26

A New Method for Determining the Weighting of Optimum Combinatorial Investment

Cheng　Xiyu

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract　In determining the weighting of ordinary linear combinatorial investment, some compromising restrictions will most likely be carried out between the objective function of minimum risk and maximum earning, such as to reduce the risk to the minimum in case the expected earning has been determined. By adopting nonlinear objective function of minimum risk for the earning per unit, the author precisely determines the weighting of optimum combinatorial investment. This is a method of directly perceived significance both in theory and in practice.

Keywords　combinatorial investment, minimum risk, the earning per unit