第 18 卷 第 2 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 18 No. 2
1997 年 4 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Apr. 1997

解四阶抛物型方程的高精度显式差分格式*

曾 文 平

(华侨大学管理信息科学系,泉州 362011)

摘要 提出解四阶抛物型方程 $u_t+u_{xxxx}=0$ 的一个三层显式差分格式. 其稳定性条件和局部截断误差分别为 $r=\Delta t/\Delta x^4\leqslant 1/8$ 和 $O(\Delta t^2+\Delta x^4)$.

关键词 四阶抛物型方程,高精度,显式差分格式

分类号 O 241.82

考虑下列四阶抛物型方程初边值问题

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0 \qquad (0<x<1,0<t<T),\\
&u(x,0)=f(x) \qquad (0\leqslant x\leqslant 1),\\
&u(0,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t)=u(1,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1,t)=0 \qquad (0\leqslant t\leqslant T).
\end{aligned}\right\} \tag{1}
$$

1960 年,Саулвев 在文〔1〕中对四阶抛物型方程(1)构造了一个显式格式,但局部截断误差仅为 $O(\Delta t+\Delta x^2)$,精度太低;他又提出了两个隐式差分格式,其局部截断误差分别为 $O(\Delta t^2+\Delta x^2)$ 和 $O(\Delta t^2+\Delta x^4)$,但需解线性方程组,计算量太大. 针对上述存在问题,本文构造了一个三层含参数的显式差分格式,从而避免了解线性方程组,且其局部截断误差高达 $O(\Delta t^2+\Delta x^4)$,是高精度格式,而其稳定性条件为 $r=\Delta t/\Delta x^4<\frac{1}{8}$. 数值例子表明该格式是有效的.

1 差分格式的构造

设时间步长为 Δt,空间步长为 Δx,网域由点集 (x_j,t_n) $(j=0,1,\cdots,J;n=0,1,2,\cdots)$ 所组成,其中 $x_j=j\Delta x,\Delta x=J^{-1},t_n=n\Delta t$. 又设 $r=\Delta t/\Delta x^4$ 为网格比. 初边介条件的离散化处理同文〔1〕,从略.

用如下含参数的差分方程逼近微分方程(1)有

$$
\eta_0\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+\eta_1\frac{u_{j-1}^n-u_{j-1}^{n-1}}{\Delta t}+\eta_2\frac{u_j^n-u_j^{n-1}}{\Delta t}+\eta_3\frac{u_{j+1}^n-u_{j+1}^{n-1}}{\Delta t}
+\eta_4\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{\Delta t}+\eta_5\frac{\delta_x^4u_j^n}{\Delta x^4}+\eta_6\frac{\delta_x^4u_j^{n-1}}{\Delta x^4}=0, \tag{2}
$$

其中 u_j^n 表示 u 在节点 $(j\Delta x,n\Delta t)$ 上的值,δ_x^4 表示关于 x 方向的四阶中心差分算子,即

* 本文 1996-09-16 收到;福建省自然科学基金资助项目

$$\delta_x^4 u_j^n = u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + 6u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n,$$

而 $\eta_k(k=0,1,2,\cdots,6)$ 是待定参数. 通过适当选取这些参数, 可以使差分方程(2)逼近微分方(1)具有尽可能高阶的离散误差, 而且有较好的稳定性.

当微分方程(1)的解充分光滑时有如下关系式成立:

$$\frac{\partial^{q+p} u}{\partial t^q \partial x^p} = (-1)^q \frac{\partial^{4q+p} u}{\partial x^{4q+p}} \qquad (p,q=0,1,2,\cdots). \tag{3}$$

将(2)式中各节点上的 u 在节点 $(j\Delta x, n\Delta t)$ 处展开的 Taylor 级数代入, 并利用关系式(3), 经整理得

$$\begin{aligned}
&(\eta_0+\eta_1+\eta_2+\eta_3+2\eta_4)\frac{\partial u}{\partial t} + (\eta_5+\eta_6)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \\
&- (\eta_1-\eta_3)\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2}(\eta_0-\eta_1-\eta_2-\eta_3)\Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \eta_6 \Delta t \frac{\partial^5 u}{\partial t \partial x^4} \\
&+ \frac{1}{2}(\eta_1+\eta_3)\Delta x^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{1}{6}(\eta_5+\eta_6)\Delta x^2 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{1}{2}(\eta_1-\eta_3)\Delta x \Delta t \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \\
&+ \frac{1}{6}(\eta_3-\eta_1)\Delta x^3 \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t} - \frac{1}{4}(\eta_1+\eta_3)\Delta t \Delta x^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{1}{6}\eta_6 \Delta t \Delta x^2 \frac{\partial^7 u}{\partial t \partial x^6} \\
&+ O(\Delta t^2 + \Delta x^4 + \Delta t \Delta x^3) = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

上式中的 $(\eta_5+\eta_6)$ 可以是任何非零常数. 因 $\Delta t = O(\Delta x^4)$, 故 $O(\Delta t^2+\Delta x^4+\Delta t\Delta x^3) = O(\Delta t^2+\Delta x^4)$. 而为了使截断误差阶达到 $O(\Delta t^2+\Delta x^4)$, 只需下列诸方程同时成立:

$$\left.\begin{aligned}
&\eta_0+\eta_1+\eta_2+\eta_3+2\eta_4 = 1, \qquad \eta_5+\eta_6 = 1, \\
&\eta_1-\eta_3 = 1, \qquad \frac{1}{2}(\eta_0-\eta_1-\eta_2-\eta_3)+\eta_6 = 0, \\
&\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_3) - \frac{1}{6}(\eta_5+\eta_6) = 0, \qquad \frac{1}{4}(\eta_1+\eta_3) - \frac{1}{6}\eta_6 = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

解方程组(5)得

$$\eta_0 = \eta, \eta_1 = \eta_3 = \frac{1}{6}, \eta_2 = \frac{2}{3}+\eta, \eta_4 = -\eta, \text{且 } \eta_5 = \eta_6 = \frac{1}{2}. \tag{6}$$

将式(6)代入式(2)得两层十点隐式格式为

$$u_{j+1}^n + (4+3r\delta_x^4)u_j^n + u_{j-1}^n = u_{j+1}^{n-1} + (4-3r\delta_x^4)u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}, \tag{7}$$

其局部截断误差为 $O(\Delta t^2+\Delta x^4)$. 格式(7)亦即文[1]中 P. 152 中给出的 $\theta=1/6$ 的格式, 即

$$M_h u_j^n = (1+\frac{1}{6}\delta_x^2)\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}\frac{\delta_x^4(u_j^{n+1}+u_j^n)}{\Delta x^4} = 0. \tag{7'}$$

为了得到显式格式, 将式(5)中最后一个方程丢掉, 然后从其余 5 个方程得

$$\left.\begin{aligned}
&\eta_0 = \frac{1}{3}+\omega-2\eta, \qquad \eta_1 = \eta_3 = \frac{1}{6}, \qquad \eta_2 = \omega, \\
&\eta_4 = \frac{1}{6}+\eta-\omega, \qquad \eta_5 = 1-\eta, \qquad \eta_6 = \eta.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

将其代入式(2)得三层 11 点显式差分格式为

$$(\frac{1}{2}-\eta)u_j^{n+1} = (\frac{1}{3}-2\eta)u_j^n - (1-\eta)r\delta_x^4 u_j^n - \frac{1}{6}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)$$

$$+ (\frac{1}{6} + \eta) u_j^{n-1} - \eta r \delta_x^4 u_j^{n-1} + \frac{1}{6}(u_{j+1}^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}), \tag{9}$$

其局部截断误差也是 $O(\Delta t^2 + \Delta x^4)$.

2 差分格式稳定性

定理 1 二层隐格式(7)绝对稳定.

证明 据 Fourier 分离变量法,取 $u_j^n = \lambda^n e^{ij\theta}$($i = \sqrt{-1}$, $|\theta| < \pi$),代入式(7)得传播因子为

$$G(\theta) = \frac{4 - 48rs^4 + 2\cos\theta}{4 + 48rs^4 + 2\cos\theta}, \tag{10}$$

其中 $s = \sin\frac{\theta}{2}$,显然对任意 θ 与 $r > 0$ 均有 $|G(\theta)| \leqslant 1$,从而格式(7)绝对稳定,这与文[1]结论相符.

定理 2 三层显式格式(9)稳定的一个充分条件是

$$r < \frac{1}{8}, \text{且 } \eta < \min(0, \frac{12r - 1}{24r - 3}). \tag{11}$$

证明 当 $\eta \neq \frac{1}{2}$ 时,三层显式格式(9)等价于如下两层方程组:

$$\left.\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \frac{2}{1 - 2\eta}[(\frac{1}{3} - 2\eta)u_j^n - (1 - \eta)r\delta_x^4 u_j^n - \frac{1}{6}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) \\ &\quad + (\frac{1}{6} + \eta)V_j^n - \eta r \delta_x^4 V_j^n + \frac{1}{6}(V_{j+1}^n + V_{j-1}^n)], \\ V_j^{n+1} &= u_j^n. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

由稳定性分析的分离变量法,取 $u_j^n = U^n e^{ij\theta}$, $V_j^n = V^n e^{ij\theta}$ ($i = \sqrt{-1}$, $|\theta| < \pi$). 代入式(12)经整理得

$$\begin{pmatrix} U^{n+1} \\ V^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^n \\ V^n \end{pmatrix}, \tag{13}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} G_{11} &= \frac{2}{1 - 2\eta}[(\frac{1}{3} - 2\eta) - 16r(1 - \eta)S^4 - \frac{1}{3}\cos\theta], \\ G_{12} &= \frac{2}{1 - 2\eta}[(\frac{1}{6} + \eta) - 16r\eta S^4 + \frac{1}{3}\cos\theta], \\ G_{21} &= 1, \quad G_{22} = 0 \quad (\text{其中 } S = \sin\frac{\theta}{2} \in [-1, 1]). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

由传播矩阵

$$G(S) = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

得特征方程为

$$\lambda^2 - G_{11}\lambda - G_{12} = 0. \tag{16}$$

引理 1[2] 方程(15)的两根按模小于等于 1 的充要条件为

$$|G_{11}| \leqslant 1 - G_{12} \leqslant 2. \tag{17}$$

而在特征方程(16)中,当 $\eta<\frac{1}{2}$ 时,欲使

$$1-G_{12}=1-\frac{2}{1-2\eta}[(\frac{1}{6}+\eta)-16r\eta S^4+\frac{1}{3}\cos\theta]$$
$$=\frac{1}{1-2\eta}[\frac{2}{3}-4\eta+32r\eta S^4-\frac{2}{3}\cos\theta]\leqslant 2, \tag{18}$$

即应使 $\frac{2}{3}-4\eta+32r\eta S^4-\frac{2}{3}\cos\theta\leqslant 2-4\eta$,或

$$32r\eta S^4+\frac{4}{3}S^2\leqslant 2. \tag{19}$$

而式(19)成立的充要条件为

$$\eta<\frac{1}{2}\text{ 且 }\eta\leqslant\frac{1}{48r}. \tag{20}$$

又在 $\eta<\frac{1}{2}$ 时,条件

$$|G_{11}|=\frac{2}{1-2\eta}|(\frac{1}{3}-2\eta)-16r(1-\eta)S^4-\frac{1}{3}\cos\theta|$$
$$\leqslant 1-G_{12}=\frac{2(\frac{1}{3}-2\eta+16r\eta S^4-\frac{1}{3}\cos\theta)}{1-2\eta}, \tag{21}$$

即

$$-(\frac{1}{3}-2\eta+16r\eta S^4-\frac{1}{3}\cos\theta)\leqslant\frac{1}{3}-2\eta-16r(1-\eta)S^4-\frac{1}{3}\cos\theta$$
$$\leqslant\frac{1}{3}-2\eta+16r\eta S^4-\frac{1}{3}\cos\theta. \tag{22}$$

式(22)右端不等式对任意 $r>0$ 都成立,而左端不等式即为

$$\eta\leqslant\frac{1}{3}S^4-4r(1-2\eta)S^4,\qquad\forall S\in[-1,1]. \tag{23}$$

上式成立的充分条件是式(11)成立. 显然,当式(11)成立时必有 $\eta<0$. 所以条件(11)强于条件(20),因此,式(11)是引理 1 条件(17)成立的充分条件. 故由引理 1 知,特征方程的两根按模小于等于 1.

引理 2[3]　差分格式(9)稳定,即矩阵族 $G^n(S^*)$($S^*\in[0,2]$,$n=1,2,\cdots$)一致有界的充分必要条件:(Ⅰ)$|\lambda_{1,2}|\leqslant 1$;(Ⅱ)$N_0^2((1-\frac{1}{4}|G_{11}+G_{22}|^2)^2)\cap N_0^2(|(G_{11}-G_{22})^2+4G_{12}G_{21}|)\subseteq N_0^2((G_{11}-G_{12})^2)\cap N_0^2((G_{12}^2))\cap N_0^2((G_{21}^2))$,其中 $N_0^2(f(S^*))$ 表示多项式 $f(S^*)$ 在区间[0,2]内所有实根的集合(重根要重复计)$S^*=1-\cos\theta\in[0,2]$.(即 $S=\sin\frac{\theta}{2}\in[-1,1]$).

前面已验证引理 2 的条件(Ⅰ)成立. 下面考虑引理 2 的条件(Ⅱ). 因为 $G_{21}=1$,所以 $N_0^2((G_{21}^2))$ 是空集,故条件(Ⅱ)成立的充要条件是使 $1-\frac{1}{4}G_{11}^2=G_{11}^2+4G_{12}=0$ 成立的 S^* 或者不存在或者不属于区间[0,2](即 $S\overline{\in}[-1,1]$). 由

$$1-\frac{1}{4}G_{11}^2=0 \tag{24}$$

解得 $G_{11}^2=4$,将其代入 $G_{11}^2+4G_{12}=0$ 得 $G_{12}=-1$,由此进一步推得

$$\frac{4}{3}(1+24r\eta S^2)S^2=2. \tag{25}$$

当 1° $\eta=-\frac{1}{24r}$时,式(25)的左式$=\frac{4}{3}(1-S^2)S^2\neq 2$,故式(25)不成立;2° $\eta<-\frac{1}{24r}$时,(25)左式$<\frac{4}{3}(1-S^2)S^2<\frac{4}{3}\neq 2$,故式(25)也不成立;3° $-\frac{1}{24r}<\eta<0$ 时,(25)左式$\leqslant\frac{4}{3}(1+0)S^2=\frac{4}{3}S^2\leqslant\frac{4}{3}\neq 2$,故式(25)也不成立.

由此可见,在条件(11)成立的前提下,使式(24)成立的$S^*\overline{\in}[0,2]$(即$S\overline{\in}[-1,1]$). 由引理 2 知,在条件(11)成立时格式(9)必稳定.

3 数值例子

解四阶抛物型方程混合问题

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0 \qquad (0<x<\pi,t>0),\\&u(x,0)=\sin x \qquad (0<x<\pi),\\&u(0,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t)=u(\pi,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\pi,t)=0 \qquad (t>0),\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

其精确解为

$$u(x,t)=\mathrm{e}^{-t}\sin x. \tag{27}$$

利用格式(19)进行求解并与精确解列表比较结果.

取 $\Delta x=\frac{\pi}{10}$, $\Delta t=9.999\times10^{-4}$, 于是, $r=0.102\,65<\frac{1}{8}$. 此时格式(9)的稳定条件为 $\eta\leqslant-0.432\,104\,1\cdots$.

边界条件处理同文[1], 即用中心差商代替微商. 于是, 有 $u_0^n=u_J^n=0, u_{-1}^n=-u_1^n, u_{M+1}^n=-u_{M-1}^n$. 而初始条件则用直接转移法得 $u_j^0=\sin j\Delta x(j=0,1,2,\cdots,J;n=0,1,2,\cdots)$.

又本文所构造的显格式(9)是三层格式,除了初始层网格函数值已知外,尚需用其他方法先算出第 1 层网格函数值. 为方便起见,我们按精确值进行计算(实际计算可用同精度的二层隐格式计算第 1 层的值). 然后按格式(9)计算到第 500 层的结果列表如表 1).

表 1 $\Delta x=\pi/10, \Delta t=9.999\times10^{-4}, r=0.102\,65$ 和 $n=500$ 的数据表

x	精确解	显式格式(9)			
		$\eta=-0.45$	$\eta=-1$	$\eta=-4$	$\eta=0$
$\pi/10$	0.187 437	0.187 437	0.187 436	0.187 432	8.565 38E+95
$2\pi/10$	0.356 527	0.356 527	0.356 525	0.356 516	−1.662 923E+96
$3\pi/10$	0.490 717	0.490 717	0.490 715	0.490 703	2.242 45E+96
$4\pi/10$	0.576 873	0.576 872	0.576 870	0.576 858	−2.636 15E+96
$5\pi/10$	0.606 560	0.606 559	0.606 557	0.606 542	2.771 82E+96

由表 1 看出,格式(9)在 $\eta=-0.45$、-1、-4 时的绝对误差达 10^{-5}至 10^{-7}. 可见格式(9)的精度是很高的. 然而,$\eta=0$ 不满足稳定条件,计算结果也不稳定.

表 2 分别给出 $r=\frac{1}{8}$,$\eta=-0.45,0,-1,-4$ 时的值. 由表 2 看出,此时虽然 $r=1/8$ 不满足稳定条件,但当 $\eta=-4$ 时仍稳定,而当 $\eta=-1,-0.45,0$ 时则不稳定.

表 2　$\Delta x=\pi/10$,$\Delta t=1.2176\times10^{-3}$,$r=1/8$ 和 $n=500$ 的数据表

x	精确解	显式格式(9)			
		$\eta=-4$	$\eta=-1$	$\eta=-0.45$	$\eta=0$
$\pi/10$	0.168 105	0.168 098	1.002 36E+26	7.780 71E+69	1.816 65E+176
$2\pi/10$	0.319 755	0.319 741	−1.906 61E+26	−1.479 98E+70	−3.455 47E+176
$3\pi/10$	0.440 105	0.440 085	2.624 22E+26	2.037 02E+70	4.756 05E+176
$4\pi/10$	0.517 374	0.517 351	−3.084 96E+26	−2.394 66E+70	−5.591 07E+176
$5\pi/10$	0.544 000	0.543 975	3.243 71E+26	2.517 89E+70	5.878 80E+176

上述事实进一步说明,格式(9)是条件稳定的,而条件(11)仅是稳定的充分条件.

本文承蒙陈旭东同志协助上机算题,特此致谢.

参　考　文　献

1 Саульев В К. 抛物型方程的网格积分法. 袁兆鼎译. 北京:科学出版社,1963. 143～152

2 李荣华,冯果忱. 微分方程数值解法. 北京:人民教育出版社,1980. 376

3 马驷良. 二阶矩阵族 $G^n(k,\Delta t)$ 一致有界的充要条件及其对差分方程稳定性的应用. 高等学校计算数学学报,1980,(2):28～45

4 Richtmyer R D, Morton K W. Difference method for initial-value problems, 2nd ed. New York: Wiley, 1967. 59～91

Explicit Difference Scheme of High Accuracy for Solving Four Order Parabolic Equation

Zeng Wenping

(Dept. of Info. Manag. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract A three-level explicit difference scheme is proposed for solving four-order parabolic equation $U_t+U_{xxxx}=0$. The scheme meets a stability condition of $r=\Delta t/\Delta x^4<1/8$ and shows a local truncation error of $O(\Delta t^2+\Delta x^4)$.

Keywords four order parabolic equation, high accuracy, explicit difference scheme