第18卷 第2期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.18 No.2
1997年4月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Apr. 1997

参数表示下的拟共形映照*

黄 心 中

(华侨大学管理信息科学系，泉州 362011)

摘要 改进了 Reich 关于单位圆内拟共形映照的一个偏差定理，其应用给出了在参数表示下 N 类拟共形映照的伸缩商的更好估计．

关键词 拟共形映照，偏差定理，拟共形扩张，参数表示

分类号 O 174.55

给定单位圆 $\partial D=\{z\mid |z|=1\}$ 到自身上的保向同胚映照 $\varphi(z)$，Beurling-Ahlfors[1]首先给出 $\varphi(z)$ 具有单位圆盘 $D=\{z\mid |z|<1\}$ 上的拟共形扩张的充要条件．后来，Douady-Earle[2]发展了一个新方法，证明了：若 $\varphi(z)$ 具有到 $\overline{D}$ 内的拟共形扩张，则

$$\int_{\partial D}\frac{\varphi(\zeta)-\omega}{1-\overline{\omega}\varphi(\zeta)}\,\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|^2}=0\ ,\ z\in D, \tag{1}$$

唯一确定一个 D 到自身上的拟共形映照 $E(\varphi)$．

Reich[3]发展了夏道行[4]的参数法，构造出具有相同边界值拟共形映照的参数表示．对于构造出来的拟共形扩张，估计其最大伸缩商是一个共同关注的问题[5~7]．它除了在 Teichmüller 空间理论中起重要作用外，本身也是很重要的．本文研究拟共形映照的一个偏差定理，然后应用于参数表示下 N 类拟共形映照，给出其伸缩商的更好估计．

1 Reich 的参数表示法

令 Q 是 D 到自身上的拟共形映照全体，$f^\mu\in Q$ 表示 $f(z)$ 是以 $\mu(z)$ 为复特征，具有标准化 $f^\mu(0)=0$, $f^\mu(1)=1$ 的拟共形映照．Reich[3]的参数法是这样构成的：给定 $f(z)=f^\mu(z)$，确定正数 T，使方程

$$d\omega/dt=F(\omega,t),\ \omega(0)=z,\ 0\leqslant t\leqslant T, \tag{2}$$

具有唯一解 $\omega=f(z,t)$，并满足 $f(z,T)=f^\mu(z)$，然后再利用变换

$$F^*(\omega,t)=\int_{\partial D}R(\omega,\zeta)F(\zeta,t)\,|d\zeta|,\ \omega\in D, \tag{3}$$

这里 $R(\omega,\zeta)$ 是与 $F(\omega,t)$ 无关的核函数，最后求出

$$\frac{d\omega}{dt}=F^*(\omega,z),\ \omega(0)=z,\ 0\leqslant t\leqslant T, \tag{4}$$

* 本文 1996-09-02 收到；福建省自然科学基金资助项目

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

的解 $\omega=f^*(z,t)$. 这样，$f^*(z,t)$满足下列条件

$$f^*(z,t)\in Q,\ f^*(z,t)|_{\partial D}=f(z,t)|_{\partial D},\ t\geqslant 0. \tag{5}$$

若记式(4)的解为 $\wedge f=f^*$，则 M 是 D 到自身上的线性变换全体，$B(D)=\{\varphi(z)\,|\,\varphi(z)\in L^1(D),\ \varphi(z)$在 D 上解析$\}$，$N(D)=\{\kappa(z)\,|\,\kappa(z)\in L^\infty(D),\ \iint\limits_D \kappa(z)\varphi(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，对于 $\varphi(z)\in B(D)$成立$\}$. 设 $\omega=f^{\kappa(z)}(z)\in Q$，令

$$\mu(z,t)=\frac{\mathrm{e}^t-1}{\mathrm{e}^t+1}\frac{\kappa(z)}{k},\ z\in D, \tag{6}$$

其中 $k=(K-1)/(K+1)=\|\kappa(z)\|_\infty$. 若取 $T=\log K$，令 $f(z,t)=f^{\mu(z,t)}(z)$，则 $f(z,t)$是 e^t-拟共形映照，而且确定一个 $D\times\{t\geqslant 0\}$上的复值函数 $F(\omega,t)$满足方程(2). Reich[3]证明了下列定理 A.

定理 A 方程(4)有唯一解 $w=f^*(z,t)=\wedge f(z,t)$，$(0\leqslant t\leqslant T)$，满足：(1) $\wedge f(z,t)|_{\partial D}=f(z,t)|_{\partial D}$；(2) $\wedge(g\cdot f)=g\cdot\wedge f$，对任何 $f\in Q$，$g\in M$ 成立；(3) 若 $f\in Q$ 是 K-拟共形映照，则 $\wedge f$ 是 K^3-拟共形映照.

基于极值拟共形映照理论的一个引理[8]，对于 $\kappa(z)\in N(D)$，$t>0$，$t\to 0$，存在$[1+o(t)]$-拟共形映照 $\tilde{f}(z)\in Q$，满足 $\tilde{f}(z)|_{\partial D}=f^{t\kappa(z)}(z)|_{\partial D}$. 特别地，当 $\kappa(z)=k\mathrm{e}^{i\theta}$时，Reich[9]还讨论了它的精确性. 作为定理 A 的应用，Reich[3]证明了下列定理 B.

定理 B 若设 $\kappa(z)\in N(D)$，$f(z,t)=f^{k(t)\kappa(z)}(z)$，$k(z)=\dfrac{1}{k}\,\dfrac{\mathrm{e}^t-1}{\mathrm{e}^t+1}$，$t\geqslant 0$，那么，$\wedge f(z,t)$是 $\varphi(t)$-拟共形映照. $\varphi(t)$满足下式，即

$$\varphi(t)=1+O(t^{\frac{3}{2}}),\ t\to 0. \tag{7}$$

为了证明定理 B，Reich[3]证明了下列关于拟共形映照的偏差定理 C.

定理 C 存在一个仅与 $k(0<k<1)$有关的函数 $\varepsilon(k)$，满足下式，即

$$\lim_{k\to 0}\varepsilon(k)=0, \tag{8}$$

使得对于 $f\in Q$，$f(0)=0$，$|f_{\bar z}/f_z|\leqslant k<1$. 若 $\Omega(z)$是 $L^\infty(D)$上的任意可积函数，满足下式

$$\iint\limits_D \Omega(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\ |\Omega(z)|\leqslant 1, \tag{9}$$

则

$$\left|\iint\limits_D f_z^2(z)\Omega(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\varepsilon(k), \tag{10}$$

其中 $\varepsilon(k)=(\frac{2\pi}{1-k^2}+2\pi)^{\frac{1}{2}}(\frac{\pi k^2}{1-k^2}+\frac{\Gamma^4(1/4)}{2\pi}\log\frac{1+k}{1-k})^{\frac{1}{2}}$，特别地，当 k 充分小时，可以得 $\varepsilon(k)=C\sqrt{k}$. $C>2\Gamma^2(1/4)=26.290\,0\cdots$.

2 主要结果

本文首先改进上述的偏差定理 C. 它本身在拟共形映照理论中也是很有趣的，再利用我们的结论，给出一个比定理 B 关于 N 类拟共形映照的最大伸缩商的更好估计. 我们将证明下面的几个定理.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

定理1　设 $f\in Q$, $f(0)=0$, $|f_{\bar z}/f_z|\leqslant k<1$; 若 $\Omega(z)\in L^{\infty}(D)$, 且满足 $\iint\limits_D \Omega(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$, $|\Omega(z)|\leqslant 1$, 则

$$\left|\iint\limits_D f_z^2(z)\Omega(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\delta(k), \tag{11}$$

其中 $\delta(k)\leqslant(\frac{2\pi}{1-k^2}+2\pi)^{\frac{1}{2}}(\frac{\pi k^2}{1-k^2}+8\log\frac{1+k}{1-k}+\frac{32}{\pi}\log^2\frac{1+k}{1-k})^{\frac{1}{2}}$. 特别地,当 k 充分小时,可以得 $\delta(k)\leqslant 14.2\sqrt{k}$.

定理2　设 $\kappa(k)\in N(D)$, $f(z,t)=f^{k(t)\kappa(z)}$, $k(t)=\frac{1}{k}\frac{e^t-1}{e^t+1}$,这里 $k=\|\kappa(z)\|_{\infty}$, $t\geqslant 0$, 则 $\wedge f(z,t)$ 是 $\theta(t)$-拟共形映照;且当 t 足够小时,有 $\theta(t)=(1+4.6t^{\frac{3}{2}})/(1-4.6t^{\frac{3}{2}})$.

为了证明我们的结论,需要用到下列引理.

引理1　对每个 D 到自身上的拟共形映照 $f(z)$,存在 $\varphi(z)\in M$, 使

$$|f(z)-\varphi(z)|\leqslant\frac{4}{\pi}\log(1+k)/(1-k),\ z\in D, \tag{12}$$

成立,其中 $k=\operatorname*{esssup}\limits_{z\in D}|f_{\bar z}/f_z|$. 引理1的证明见文[10].

引理2　对于每个 $\gamma(z)\in M$, $\gamma(z)$ 具有如下形式,即

$$\gamma(z)=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\bar\alpha z},\ \theta\in R,\ \alpha\in D,$$

引理2的证明见文[11].

(1) 定理1的证明. 若 $f\in Q$, $|f_{\bar z}/f_z|\leqslant k<1$, 则

$$\iint\limits_D|f_z|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D(|f_z|^2-|f_{\bar z}|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D|f_{\bar z}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\leqslant\pi+k^2\iint\limits_D|f_z|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因此, $\iint\limits_D|f_z|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\pi/(1-k^2)$. 应用引理1,2,对于 $f(z)\in Q$, 取 $\varphi(z)=e^{i\theta_0}\frac{z-\alpha}{1-\bar\alpha z}$, $\theta_0\in R$, $|\alpha|<1$,使得 $|f(z)-\varphi(z)|\leqslant\frac{4}{\pi}\log(1+k)/(1-k)$ 对 $z\in D$ 成立. 因为

$$\begin{aligned}
I&=\iint\limits_D|f_z e^{-i\theta_0}-1|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D|f_z|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\mathrm{Re}\iint\limits_D f_z e^{-i\theta_0}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\pi\\
&=\iint\limits_D(|f_z|^2-|f_{\bar z}|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\mathrm{Re}\iint\limits_D f_z e^{-i\theta_0}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D|f_{\bar z}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\pi\\
&=2\pi+\iint\limits_D|f_{\bar z}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\mathrm{Re}\iint\limits_D[f_z e^{-i\theta_0}-(\frac{z-\alpha}{1-\bar\alpha z})'_z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\mathrm{Re}\iint\limits_D\frac{(1-|\alpha|^2)}{(1-\bar\alpha z)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=2\pi|\alpha|^2+\iint\limits_D|f_{\bar z}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\mathrm{Re}\,e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta_0)}\int\limits_{|z|=1}(f-e^{i\theta_0}\frac{z-\alpha}{1-\bar\alpha z})\mathrm{d}\bar z\\
&\leqslant 2\pi|\alpha|^2+\pi k^2/(1-k^2)+2\pi\max_{|z|=1}|f(z)-\varphi(z)|,
\end{aligned}$$

由于 $f(0)=0$, 从式(12)可得 $|\alpha|=|\varphi(0)|\leqslant\frac{4}{\pi}\log(1+k)/(1-k)$, 故

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$I \leqslant \pi k^2/(1-k^2) + 8\log(1+k)/(1-k) + \frac{32}{\pi}\log^2(1+k)/(1-k). \tag{13}$$

又因 $H = |\iint_D f_z^2(z)\Omega(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y| = |\iint_D (f_z^2 \mathrm{e}^{-2i\theta_0} - 1)\Omega(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y|$，故 $H^2 \leqslant \iint_D 2(|f_z|^2 + 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \iint_D |f_z \mathrm{e}^{-i\theta_0} - 1|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant (\frac{2\pi}{1-k^2} + 2\pi)I$．从而，由式(13)得

$$H \leqslant (\frac{2\pi}{1-k^2} + 2\pi)^{\frac{1}{2}}(\frac{\pi k^2}{1-k^2} + 8\log\frac{1+k}{1-k} + \frac{32}{\pi}\log^2\frac{1+k}{1-k})^{\frac{1}{2}}.$$

容易看到，当 k 充分小时，$H \leqslant 14.2\sqrt{k}$．至此定理1证毕．当 $k \leqslant (s-1)/(s+1)$ 时，$s = \mathrm{e}^{(\frac{\pi}{4})^2(\frac{\Gamma(1/4)}{4\pi^2} - \frac{4}{\pi})}$ 时，定理1的结论比定理C的结论精确．

(2) 定理2的证明．根据假设

$$\mu(z,t) = k(t)\kappa(z),\ k(t) = \frac{1}{k}\frac{\mathrm{e}^t - 1}{\mathrm{e}^t + 1},\ t \geqslant 0,$$

由定理A知，因 $f(z,t) = f^{k(t)\kappa(z)}$ 是 e^t-拟共形映照，故 $\wedge f(z,t)$ 是 e^{3t}-拟共形映照，因而 $\theta(t)$ 是存在的．下面考虑当 t 足够小的情形．依照[3]的证明，我们有

$$F_{\bar{w}}^*(\sigma,t) = \frac{3k'(t)}{\pi}(1-|\sigma|^2)\iint_{|z|<1}\frac{f_z^2(z,t)\kappa(z)}{[1-\bar{\sigma}f(z,t)]^4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ (|\sigma|<1),$$

对于 $\sigma \in D$，令 $g_\sigma(\omega) = \dfrac{\omega - \sigma}{1 - \bar{\sigma}\omega}$，则

$$F_{\bar{w}}^*(\sigma,t) = \frac{3k'(t)}{\pi}\iint_D (g_\sigma'(f(z,t)))^2 f_z(z,t)\kappa(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{14}$$

又对于固定的 t 和 σ，取 $\zeta = \gamma(z) \in M$，使 $f_0 = g_\sigma \circ f^{k(t)\kappa(z)} \circ \gamma^{-1} \in Q$，且满足 $f_0(0) = 0$，$f_0(1) = 1$，且 f_0 仍是 e^t-拟共形映照．若取函数 $V(\zeta) = V(\gamma(z)) = \dfrac{\gamma'(z)}{\gamma'(z)}\kappa(z)$，注意到 $\|\gamma(\zeta)\|_\infty = \|\kappa(z)\|_\infty = k$，则式(14)可写成

$$F_{\bar{w}}^*(\sigma,t) = \frac{3k'(t)}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} f_{0\zeta}^2(\zeta)V(\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,\ \zeta = \xi + i\eta. \tag{15}$$

由 $\kappa(z) \in N(D)$，得 $\displaystyle\iint_{|\zeta|<1} V(\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \iint_{|z|<1}\gamma'^2(z)\kappa(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$，从而

$$|J| = |\iint_{|\zeta|<1} f_{0\zeta}^2(\zeta)V(\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta| = k|\iint_{|\zeta|<1} f_{0\zeta}^2(\zeta)\frac{V(\zeta)}{k}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta|.$$

应用定理1，可得

$$|F_{\bar{w}}^*(\omega,t)| \leqslant \frac{3k}{\pi}k'(t)\delta(\frac{\mathrm{e}^t - 1}{\mathrm{e}^t + 1}) = \frac{3}{2\pi}(\frac{2}{\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}})^2\delta(\frac{\mathrm{e}^t - 1}{\mathrm{e}^t + 1})$$

$$\leqslant \frac{3}{2\pi}\delta(\frac{\mathrm{e}^t - 1}{\mathrm{e}^t + 1}).$$

若用 $\mu^*(z,t)$ 表示 $f^*(z,t)$ 的是复特征，则 $k^*(t) = \operatorname*{esssup}_{z\in D}|\mu^*(z,t)|$．根据文[3]，有

$$\frac{\mathrm{d}k^*(t)}{\mathrm{d}t} \leqslant \frac{3k}{\pi}k'(t)\delta(\frac{\mathrm{e}^t - 1}{\mathrm{e}^t + 1})(1 - k^{*2}(t))$$

$$\leqslant \frac{3}{2\pi}\delta(\frac{\mathrm{e}^t - 1}{\mathrm{e}^t + 1}) < 6.9\sqrt{t},$$

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

当 t 充分小时成立．因此，当 t 充分小时，我们可取 $\theta(t)=(1+4.6t^{\frac{3}{2}})/(1-4.6t^{\frac{3}{2}})$．定理 2 证毕

参　考　文　献

1 Beurling A, Ahlfors L V. The boundary correspondence under quasiconformal mappings. Acta Math., 1956, 96: 125～142

2 Douady A, Earle C J. Conformally natural extensions of homeomorphisms of the circle. Acta Math., 1986, 157: 23～48

3 Reich E. A quasiconformal extension using the parametric representation. J. d'Analyse Math., 1990, 54: 246～258

4 Xia Daoxing. Parametric representation of quasiconformal mappings. Science Record, 1959, (3): 400～407

5 Li Zhong. On Beurling-Ahlfors extensions. Acta Math. Sinica, 1983, 26: 279～290

6 Partyka D. A distortion theorem for quasiconformal auto-morphisms of the unit disk. Ann. Polonici Math., 1991, 55: 277～281

7 Reich E, Strebel K. Extremal quasiconformal mappings with given boundary values. in Contributions to Analysis. New York: Academic Press, 1974. 375～392

8 Lehto O. Univalent functions and Teichmüller spaces. New York: Spring-Verlag, 1987. 227～228

9 Reich E. On the mapping with complex dilatation $ke^{i\theta}$. Ann. Acad. Sci. Fenn, 1987, 12: 261～268

10 Semenov V I. Estimate in a stability theorem on conformal maps of a disk. Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, 1986, 27(2): 176～181

11 Imayoshi Y, Taniguchi M. An introduction to Teichmüller spaces. New York: Spring-Verlag, 1992. 33～34

Quasiconformal Mappings with Parametric Representation

Huang Xinzhong

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract A distortion theorem set up by Reich on quasiconformal mapping in unit disk is improved by the author. Its application leads to the obtaining of a better estimate for the complex dilatation of N-set quasiconformal mappings with parametric representation.

Keywords quasiconformal mapping, distortion theorem, quasiconformal extension, parametric representation

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net