

状态观测器用于间接测量的一种方法*

郭延森 王永初

(华侨大学精密机械工程系, 泉州 362011)

摘要 提出利用状态观测器作为间接测量器, 分析其正确选用的条件和系统的鲁棒性, 并对观测器的根分布及其结构参数的选择关系加以论证. 同时以四阶观测器为例, 说明这种设计方法具有适应参数变化的性能.

关键词 间接测量, 观测器, 系统鲁棒性

分类号 TB 22

国家“九五”规划中新型测试技术是重点发展的项目, 软测量技术被认为是最重要的研究内容之一. 所谓软测量就是利用一组可测的变量 x_1, x_2, \dots, x_n 构成一个待测参数的动态模型, 其实质就是间接测量 $y(t) = f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$. 工业过程间接测量技术由来已久, 早在 50 年代美国霍尔威尔仪表公司就利用温度 θ , 压力 P 与节流装置前后的差压 ΔP , 构成对物质质量流量 G 的检测装置, 即 $G = f(\theta, P, \Delta P)$. 类似的间接测量方法在很长的时间内有了长足的发展. 但进入 80 年以来, 这样的仪表装置就极小有新产品出现. 人们开始寻找更有效的测量方法, 来实现对难于测量参数的间接测量. 观测器的出现, 为间接测量技术展现了一个很有希望的开拓领域. 本文就观测器用于间接测量问题进行某些探索.

1 观测器的构成

Ackermann 在 1972 年提出状态观测器的概念以后, 状态观测器被人们认为是现代控制理论走向工程实用化的一个标志. 一个对象是否可控与可测是它能够实现最优状态反馈的判断条件. 一个可测的系统, 并不意味着可以实现状态反馈, 原因是系统的许多状态可能无法安装传感器(或变送器), 而状态观测器则具有间接测量系统全部状态变量的能力. 但根据观测器理论(图 1), 可得出观测器方程式为

$$\dot{Z} = [A + \Phi(s)C^T]Z + Bu - \varphi y, \quad (1)$$

式中 u 与 y 为对象的输入与输出向量; C^T 为对象的测量输出矩阵(或向量), 可表示为

$$\left. \begin{aligned} \dot{X} &= AX + Bu, \\ y &= C^T X; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$\Phi(s)$ 为调整观测器稳定性品质的传递函数矩阵, 其选择的依据是保证获得稳定的观测输出.

* 本文 1996-03-01 收到; 福建省自然科学基金资助项目

在状态观测器的设计中首先遇到的一个问题就是观测器鲁棒性的问题^[1,2].

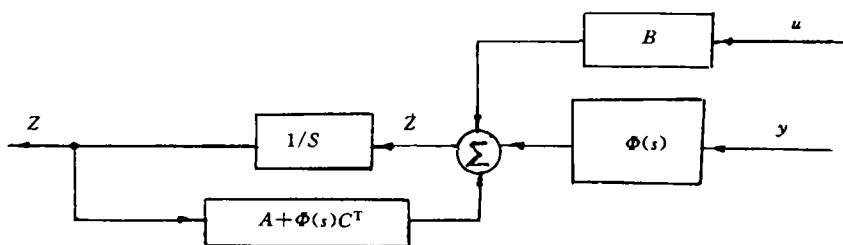


图1 状态观测器的构成

2 $\Phi(s)$ 矩阵的选择条件

式(1)两边取拉普拉斯变换,可得 $Z(s) = [IS - (A + \Phi(s)C^T)]^{-1}Bu(s) - [IS - (A + \Phi(s)C^T)]^{-1}\Phi y(s)$. 无论是 $u(s)$ 或 $y(s)$ 至 $Z(s)$ 传递函数的特性方程式均为^[3]

$$\Delta(s) = |[IS - (A + \Phi(s)C^T)]| = 0. \quad (3)$$

为了保证观测器的稳定性, $\Delta(s)$ 的特征根必须处在 S 复平面的左边, 即 $\Delta(s) = 0$ 的根, 其实部应为负值. A 矩阵的规范形式为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

且 Φ 与 C 通常取 $\Phi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]^T$, $C^T = [1, 0, \dots, 0]$, 故有

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= \det[IS - A + \Phi C^T] \\ &= \det \begin{bmatrix} -\varphi_1 + s & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\varphi_2 & s & -1 & \cdots & 0 \\ -\varphi_3 & 0 & s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\varphi_n + a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} + s \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

将式(2)展开后可得

$$\Delta(s) = (s - \varphi_1)\det\Delta_{11} + \varphi_2\det\Delta_{12} + \varphi_3\det\Delta_{13} + \cdots + (-1)^n(\varphi_n - a_n)\det\Delta_{1n}, \quad (6)$$

其中

$$\det\Delta_{11} = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & s + a_{n-1} \end{vmatrix} = s\det\Delta_{21} + V_{21}. \quad (7)$$

$\det\Delta_{21}$ 与 $\det\Delta_{11}$ 相比降一维, 并记

$$\det \Delta_{i1} = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_i & a_{i+1} & a_{i+2} & \cdots & s + a_{n-1} \end{vmatrix},$$

且知 $V_{21}=a_1$, 由于 $\det \Delta_{i1}=s \det \Delta_{i+1} + a_i$, $\det \Delta_{n-1,1}=s + a_{n-1}$. 故有

$$\det \Delta_{11} = s \det \Delta_{21} + V_{21} = s^2 \det \Delta_{31} + a_2 s + a_1 = s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \cdots + a_2 s + a_1,$$

或者

$$(s - \varphi_1) \det \Delta_{11} = s_n + (a_{n-1} - \varphi_1) s^{n-1} + (a_{n-2} - \varphi_1 a_{n-1}) s^{n-2} + \cdots + (a_{n-2} - \varphi_1 a_{n-3}) s^2 + (a_{n-1} - \varphi_1 a_2) s - \varphi_1 a_1. \quad (8)$$

$\det \Delta_{12}$ 可写成

$$\begin{aligned} \det \Delta_{12} &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & s + a_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= (-1) \det \Delta_{21} \\ &= -1 [s^{n-2} + a_{n-1} s^{n-3} + \cdots + a_3 s + a_2], \end{aligned}$$

故有 $\varphi_2 \det \Delta_{12} = -\varphi_2 s^{n-2} - \varphi_2 a_{n-1} s^{n-3} - \cdots - \varphi_2 a_3 s - \cdots - \varphi_2 a_2$, 且知

$$\begin{aligned} \det \Delta_{13} &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & s + a_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^2 \det \Delta_{31} \\ &= s^{n-3} + a_{n-1} s^{n-4} + \cdots + a_4 s + a_3 - \varphi_3 \det \Delta_{13} \\ &= -\varphi_3 s^{n-3} - \varphi_3 a_{n-1} s^{n-4} - \cdots - \varphi_3 a_4 s - \varphi_3 a_3. \end{aligned} \quad (9)$$

同理可得 $\det \Delta_{14} = (-1)^3 \det \Delta_{41} = -s^{n-4} - a_{n-1} s^{n-5} - \cdots - a_5 s - a_4$, 从而

$$\varphi_4 \det \Delta_{14} = -\varphi_4 s^{n-4} - \varphi_4 a_{n-1} s^{n-5} - \cdots - \varphi_4 a_5 s - \varphi_4 a_4,$$

$$\varphi_i \det \Delta_{1i} = (-1)^{2i-1} [\varphi_i s^{n-i} + \varphi_i a_{n-1} s^{n-(i+1)} + \cdots - \varphi_i a_{i+1} s - \varphi_i a_i],$$

$$(-\varphi_n + a_0) \det \Delta_{1n} = (-\varphi_n + a_0) (-1)^{n-1} (-1)^{n-1} = -\varphi_n + a_0. \quad (10)$$

由此可得 $\Delta(s)$ 展开式为

$$\Delta(s) = s_n + \beta_{n-1} s_{n-1} + \beta_{n-2} s_{n-2} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0, \quad (11)$$

其中 $\beta_{n-i} = a_{n-i} - \varphi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \varphi_k a_{n-(i-k)}$, $i=1, 2, \cdots, n$. φ 的选择就是保证获得稳定的观测器, 即使式 (10) 的根 s_i 满足 $R_{es}[s_i] < 0$.

假如 $\Delta(s)$ 的阶次较低, 应用 E. J. Routh 判据或者 A. Hurwitz 判据, 在 $\Delta(s)$ 为高阶的场合下, 采用这两种判据的方法会遇到很大的困难. 但通常情况 $\Delta(s)$ 都为低阶, 采用经典的判据来确定 φ 的取值仍然很有效. 这里以四阶观测器为例来加以说明.

对象状态方程式为

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (12a)$$

观测方程为

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0]X^T, \quad (12b)$$

则可得到

$$\Delta(s) = s^4 + (a_3 - \varphi_1)s^3 + (a_2 - \varphi_2 - \varphi_1 a_3)s^2 + (a_1 - \varphi_3 - \varphi_1 a_2 - \varphi_2 a_3)s + (a_0 - \varphi_4 - \varphi_1 a_1 - \varphi_2 a_2 - \varphi_3 a_3). \quad (13)$$

式(12)观测器稳定的必要条件为

$$\left. \begin{aligned} \beta_3 &= (a_3 - \varphi_1) > 0, \\ \beta_2 &= (a_2 - \varphi_2 - \varphi_1 a_3) > 0, \\ \beta_1 &= (a_1 - \varphi_3 - \varphi_2 a_2 - \varphi_2 a_3) > 0, \\ \beta_0 &= (a_0 - \varphi_4 - \varphi_1 a_1 - \varphi_2 a_2 - \varphi_3 a_3) > 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

观测器稳定的充分条件为 $b_1 = (\beta_3 \beta_2 - \beta_1) / \beta_3 > 0$; $c_1 = (\beta_1 - \beta_3 \beta_0) / b_1 > 0$. 充分条件式还可写成

$$\left. \begin{aligned} \beta_2 &> \frac{\beta_1}{\beta_3}, \\ \beta_1^2 &< \beta_3 \beta_2 + \beta_3^2 \beta_0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

可见观测器系数 $\varphi_i (i=1, 2, \dots, 4)$ 满足稳定性的选择范围很宽. 但是, 为了改善观测器的响应与跟踪性能, 观测器的根分布应在原观测对象更远离 s 复平面虚轴的稳定区域内选择. 例如, 原对象的系统矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -6 & -14.5 & -14 & -6.5 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

根据 $|I\lambda - A| = 0$, 可求得 $\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2, \lambda_4 = -3$. 若选择

$$\begin{aligned} \Phi &= [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3 \ \varphi_4]^T \\ &= [-2.5 \ 2.75 \ -3.625 \ 9.125]^T, \end{aligned} \quad (17)$$

此时观测器的闭环根分布为 $s_1 = -1, s_2 = -2, s_3 = -3, s_4 = -4$. 图 2a, b, c, d 分别表示四个不同观测状态的跟踪过程曲线. 图中实线为对象的原状态, 虚线为观测状态.

3 Z 与 X 状态的渐近逼近性

由式(1)与式(2)得出观测器状态 Z 与原状态 X 的误差方程式为

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \dot{X} - \dot{Z} = (A + \Phi C^T)(X - Z) \\ &= (A + \Phi C^T)E, \end{aligned} \quad (18)$$

由式(18)解得 $E(t) = e^{(A + \Phi C^T)t} E(0)$. 记 $\Lambda = P^{-1}(A + \Phi C^T)P$, 其中

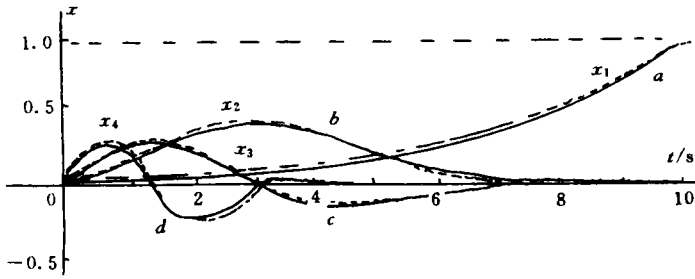


图 2 Z 跟踪 X 的响应曲线

$$\Lambda = \begin{bmatrix} s_1 & & 0 \\ & s_i & \\ & & \ddots \\ 0 & & & s_n \end{bmatrix}, s_i < 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

P 为矩阵 $(A + \Phi(s)C^T)$ 转换成对角形矩阵的变换矩阵, 则有 $e^{(A + \Phi(s)C^T)t} = P e^{\Lambda t} P^{-1}$. 因

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\Lambda t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} e^{s_1 t} & & 0 \\ & e^{s_i t} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & e^{s_n t} \end{bmatrix} = 0,$$

故有 $\lim_{t \rightarrow \infty} (X(t) - Z(t)) = 0$, 即 $Z(\infty) = X(\infty)$. $Z(t)$ 渐近逼近 $X(\infty)$ 的真值, 实际上可用 1% 的误差来度量 $Z(t)$ 逼近 $X(\infty)$. 记 S_{\min} 为绝对值最小的 $[A + \Phi C^T]$ 的本征值, 则逼近时间 t_s 约为 $t_s = -\ln 0.01 / |S_{\min}| = 4.605 / |S_{\min}|$. 按照这个准则, 可以确定式(3)中 $\Delta(s)$ 的根分布^[4].

4 鲁棒法分析

仍以四阶观测器为例. 原观测对象参数 $a_i (i=1, 2, \dots, 4)$ 的变化, 可能导致观测器特性的变化. 因此, 观测器参数 Φ 的选择应考虑系统的鲁棒法, 即在 a_i 变化的范围内, $0 < a_i, \min < a_i < \|a_i\|^\infty, i=1, 2, 3, 4$. 仍可保证 $\lim_{t \rightarrow \infty} (Z(t) - X(\infty))$ 的渐近稳定性. 对象结构参数的变化一般为同向性质, 即 a_i 的各参数均向一个方向增加或均向一个方向减少, 而且如式(16)对象有 $a_0 \approx a_3, a_1 \approx a_2$, 且 $a_1 > a_0$. 本观测器有很高的鲁棒性, 由式(14)的稳定必要条件得出^[5]:

$$(1) \beta_3 = \|a_3\|^\infty + |\varphi_1| > 0;$$

$$(2) \beta_2 = \|a_2\|^\infty + |\varphi_1| \|a_3\|^\infty - \varphi_1 > (|\varphi_1| + 1) \|a_3\|^\infty - |\varphi_2| > 0, \text{ 故有 } \|a_3\|^\infty > |\varphi_2| / (|\varphi_1| + 1), \|a_2\|^\infty > \|a_3\|^\infty;$$

$$(3) \beta_1 = \|a_1\|^\infty + |\varphi_3| + \varphi_1 \|a_2\|^\infty - |\varphi_2| \|a_3\|^\infty \cong (|\varphi_1| + 1) \|a_1\|^\infty - |\varphi_2| \|a_3\|^\infty + |\varphi_3| > 0;$$

(4) $\beta_0 = \|a_0\|^\infty - |\varphi_4| + |\varphi_1| \|a_1\|^\infty - |\varphi_2| \|a_2\|^\infty + |\varphi_3| \|a_3\|^\infty > \|a_0\|^\infty - |\varphi_4| + |\varphi_1| \|a_3\|^\infty = (|\varphi_1| + 1) \|a_0\|^\infty - |\varphi_4| > 0$, 故有 $\|a_0\|^\infty > |\varphi_4| / (|\varphi_1| + 1)$.

根据式(17)提供的中间量, 不难得出 a_0 与 a_3 均大于 2.6, a_1 与 a_2 均略大于 a_0 (或 a_3). 本例观测器均具有渐近稳定能力.

5 结束语

间接测量是国家“九五”规划期间重点支持仪器仪表发展项目, 工业上有广泛应用价值. 采用观测器进行间接测量是一种比较现实与可靠的手段. 本文提出一种采用观测器从而具有比原对象更快达到终态值的设计方法. 即合理安排观测器的闭环根分布, 使它比原对象的根分布有更大的衰减. 这种设计方法所得的结果具有鲁棒性很好的优点, 适用于原对象变化较大的场合.

参 考 文 献

- 1 John C D. Feedback control theory. New York: Macmillan Publishing Company, 1992. 85~145
- 2 Lanz K E. When is a controller H^∞ -optimal. Math. Control Signals Systems, 1988, 1(1):107~122
- 3 Luenberger D G. An introduction to observer. IEEE Trans. A-C 16, 1971, (6):596~602
- 4 王永初. 最佳控制系统设计基础. 北京: 科学出版社, 1980. 112~152
- 5 王永初. 现代调节器及其应用. 重庆: 重庆出版社, 1986. 385~422

A Method of Applying State Observer to Indirect Measurement

Guo Tinsen Wang Yongchou

(Dept. of Precis. Mech. Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract The state observer is proposed to be used as indirect measurer. The authors analyse its correctly selected condition and system robustness; and demonstrates its root distribution and structural parameter selection. This design method is exemplified by 4 order observer to have the performance suitable for parameter change.

Keywords indirect measurement, observer, system robustness