

部分预应力砼梁中无粘结筋应力增量的弯矩-曲率分析法*

方 德 平

(华侨大学土木工程系, 泉州 362011)

摘要 建立既满足纵向变形协调条件又满足梁截面 $M-N-\Phi$ 关系, 且普遍适用的梁无粘结筋应力增量的计算方法, 计算结果与已有的试验结果吻合良好. 对超静定梁曲线型无粘结筋应力增量的计算表明, 跨高比影响较小, 其应力增量值与跨中集中荷载作用下直线型无粘结筋大致相等.

关键词 梁, 部分预应力混凝土, 无粘结筋, 弯矩, 曲率, 极限应力

分类号 TU 378. 201

由于无粘结筋与其周围砼的应变不协调, 控制截面达到破坏时, 无粘结筋的极限应力一般为低于条件屈服点的未知数. 国内外已对无粘结筋的极限应力进行了大量的试验分析^[1,2]和一定的理论分析^[3,4]. 通过试验, 得到一些计算无粘结筋极限应力的经验公式. 已有的无粘结筋极限应力的计算理论主要是针对试验梁的受力情况, 一般只能分析直线布筋的静定梁. 实际的预应力梁一般为超静定结构, 其无粘结筋的布置、梁的外荷载、梁端约束等因素与试验梁不尽相同, 这些因素又直接地影响着无粘结筋的受力. 所以, 有必要探求一种普遍适用的无粘结筋极限应力的计算方法.

1 基本假设

- (1) 杆件截面变形服从平截面假定, 非预应力筋与砼粘结良好.
- (2) 在预应力单独作用下或砼开裂前, 结构处于线弹性状态.
- (3) 砼的应力-应变曲线取用规范 GBJ10-89 的理论曲线, 如图 1 所示.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_c &= f_c [2\epsilon_c/\epsilon_0 - (\epsilon_c/\epsilon_0)^2] & 0 \leq \epsilon_c < \epsilon_0, \\ \sigma_c &= f_c & \epsilon_0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{cu}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 f_c 为砼弯曲抗压强度, σ_c 和 ϵ_c 分别为砼的应力和应变, ϵ_0 取为 0.002, ϵ_{cu} 取为 0.003 3.

(4) 无粘结筋的应力-应变关系如图 2 所示, 图中 σ_p 和 ϵ_p 为其应力和应变, ϵ_e 和 ϵ_c 为其应力和应变的弹性极限, $\sigma_{0.2}$ 和 $\epsilon_{0.2}$ 为其条件屈服强度和相应的应变, σ_{pu} 和 ϵ_{pu} 为其抗拉强度及相应的应变.

- (5) 非预应力筋的应力-应变关系为

* 本文 1996-05-06 收到; 福建省自然科学基金资助项目

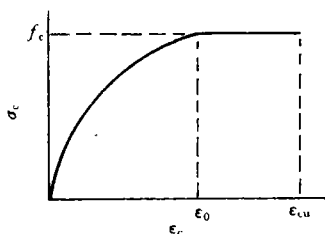


图1 砼的应力-应变关系曲线

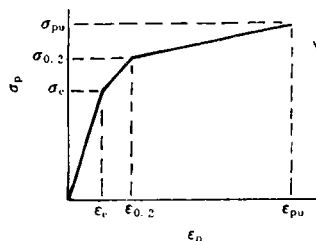


图2 无粘结筋的应力-应变关系

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= E_s \epsilon_s & \epsilon_s < \epsilon_y, \\ \sigma_s &= f_s & \epsilon_s \geq \epsilon_y, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中 σ_s 和 ϵ_s 为其应力和应变, f_s 为其抗拉强度, E_s 为其弹性模量, ϵ_y 为其屈服应变, $\epsilon_y = f_s / E_s$. 这里忽略受压钢筋的影响.

2 截面的弯矩-轴力-曲率($M-N-\Phi$)关系

由于无粘结筋与砼的应变不协调, 本文将两者分开, 分别进行分析. 砼和非预应力筋组成的梁承受着三种荷载: (1) 由预应力产生的等效荷载; (2) 外荷载; (3) 由无粘结筋应力增量产生的等效荷载增量. 第一种荷载产生的内力为综合弯矩 $M_{\text{综}}$ 和综合轴力 $N_{\text{综}}$, 它是一种初内力, 依假设由弹性计算可得. 第二, 三种荷载共同产生的弯矩 M_1 和轴力 N_1 与 $M_{\text{综}}$ 和 $N_{\text{综}}$ 的和为梁截面实际承受的弯矩 M 和轴力 N ($M = M_{\text{综}} + M_1$, $N = N_{\text{综}} + N_1$), M 和 N 应满足截面的 $M-N-\Phi$ 关系. 第二, 三种荷载共同作用所产生的孔道变形与无粘结筋应力增量之间应满足其应力-应变关系.

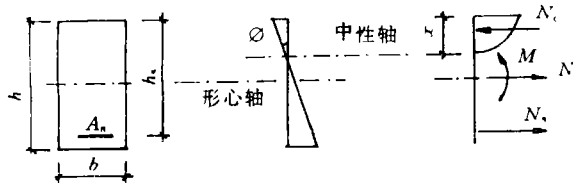


图3 开裂截面的应变与内力

矩形截面的 $M-N-\Phi$ 关系如图3所示. 截面宽和高分别为 b 和 h ; 受拉非预应力筋面积 A_s , 离受压边缘距离为 h_s , 拉力为 N_s ; 受压区高度为 x , 砼的总压力为 N_c ; 截面承受的弯矩 M , 轴力 N ; Φ 为截面曲率. 已知 M 和 N , 求 x 和 Φ 详见文[5]. 对于未开裂截面, 其曲率易从材料力学求得, 这里不赘述.

3 无粘结筋变形计算

由于综合弯矩和综合轴力是已知的, 下面分析外荷载和无粘结筋应力增量的效应. 图4为梁的受力, 其中(a)为梁端位移作用; (b)为梁上外荷载 q 及无粘结筋的等效荷载增量 Δq_p 的作用. 图5为无粘结筋受力, ΔP 为外荷载产生的无粘结筋拉力增量. 梁和无粘结筋之间的相互作用除 Δq_p 外, 还有2个锚固端的 ΔP 和偏心产生的 ΔM_p . ΔM_p 等于 ΔP 乘以锚固点的偏心距, ΔP 和 ΔM_p 为节点荷载. 无粘结筋的拉力增量 ΔP 由孔道变形求得, 这变形为力筋分布长度上各杆单元变形之和. 孔道变形由三部分组成: (1) 由杆端位移 $v_i, \theta_i, v_j, \theta_j$ 产生的 Δl_1 ; (2) 由外荷载 q 和等效荷载增量 Δq_p 产生的 Δl_2 ; (3) 由杆端变形 u_i, u_j 产生的 Δl_3 . 由于无粘结筋

十分平坦,以无粘结筋各微段纵向变形之和除以无粘结筋纵向投影长度为其应变,这应变比真实应变稍大,但一般在 2% 以内. 下面计算梁孔道变形^[6].

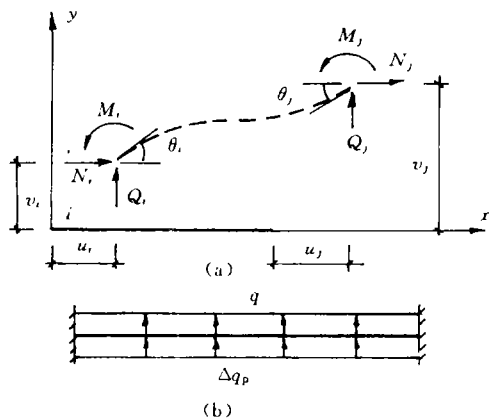


图4 梁的受力

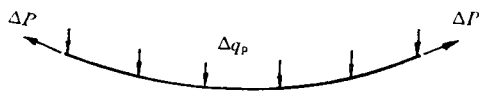


图5 无粘结筋受力

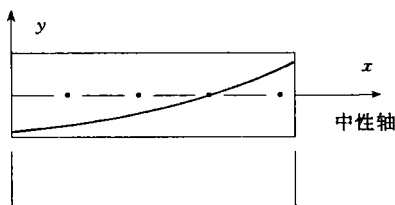


图6 无粘结筋的变形

在图 6 中,力筋曲线为 $y = ax^2 + bx + c$, Δl_1 为

$$\Delta l_1 = D_1 v_i + D_2 \theta_i - D_1 v_j + D_3 \theta_j, \quad (3)$$

式中 $D_1 = -al - b$; $D_2 = -al^2/6 + c$; $D_3 = -5al^2/6 - bl - c$.

$$\Delta q_p = 2a\Delta P, \quad (4)$$

$$\Delta l_2 = -(q + \Delta q_p)al^5/360EI, \quad (5)$$

$$\Delta l_3 = u_j - u_i, \quad (6)$$

杆单元的孔道总变形为

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3. \quad (7)$$

4 计算步骤和算例

梁开裂后,刚度沿杆长是变化的,所以应划分足够多的单元来保证计算的精度,特别在弯矩值变化较大处更应如此. 假设每个杆单元为等刚度单元,并取用杆单元内最大弯矩处的刚度. 如果采用增量法,由于梁截面屈服后,其切线刚度很小,易使总体刚度矩阵成为病态矩阵,导致计算的困难. 所以,本文采用全量法. 因此梁刚度取其割线刚度,下面为其计算步骤.

(1) 依弹性方法,计算由预应力等效荷载所产生的 $M_{\text{预}}, N_{\text{预}}$ 和截面曲率 $\Phi_{\text{预}}$,并以此状态为计算起点,如图 7 中的 O_1 点.

(2) 按上一轮迭代循环中步骤 3 的刚度值计算梁在外荷载 q 和等效荷载增量 $\Delta P, \Delta M_p, \Delta q_p$ 共同作用下的内力和位移,图 7 中的 M_1 为其弯矩值. 第一次迭代计算时,令 $\Delta P, \Delta M_p, \Delta q_p$ 为零,单元刚度取其弹性值.

(3) 计算杆单元实际弯矩最大值 $M = M_1 + M_{\text{预}}$,实际轴力 $N = \Delta P + N_{\text{预}}$,按 $M-N-\Phi$ 关系求出 x, Φ ,如图 7 中 A 点所示. 因 O_1 点为计算起点,所以新值刚度为 M_1/Φ_1 ,即 O_1A 的斜率, $\Phi_1 = \Phi + \Phi_{\text{预}}$. 在计算中, M 值可能超出其极限值,无法求得 x, Φ . 为使计算继续下去,可取一较低的刚度值为其新值刚度和较小的 x . 较低的刚度和较小的 x 值不同选值,只影响其计算过程,不影响最后结果. 在超静定结构中,刚度与弯矩值相关. 刚度大,弯矩大,计算所得的 Φ

值也大,因而新值刚度小;实际的刚度应介于两者之间. 所以,在原刚度与新值刚度之间选择适当的刚度值,作为下一轮的计算刚度,有助于计算的收敛. 同样,不同的选值,只影响计算过程,不影响最后结果.

(4) 由步骤 2 中的节点位移和杆上荷载 $q+\Delta q_p$, 按式 (3), (5), (6), (7) 求得单元孔道变形 $\Delta\epsilon$, 对于已开裂的杆件, 其中性轴已产生移动, 式 (3) 中的 c 值应据截面受压区高度 x 作相应调整. 将力筋分布长度上各杆变形相加, 得总变形和平均应变. 按照图 2 的应力-应变关系, 并结合有效预拉应力, 求得无粘结筋应力增量 $\Delta\sigma_p$ 和拉力增量 ΔP , 按式 (4) 计算下一轮的 Δq_p 和锚固处的 ΔM_p .

(5) 重复步骤 2, 3, 4, 直至以下收敛条件同时得到满足, 即

$$\sum|\Delta P_i^{(N+1)} - \Delta P_i^{(N)}|/\sum|\Delta P_i^{(N+1)}| \leq s, \sum|k_j^{(N+1)} - k_j^{(N)}|/\sum|k_j^{(N+1)}| \leq s,$$

其中 $\Delta P_i^{(N+1)}, \Delta P_i^{(N)}$ 分别为第 $(N+1)$ 次和第 N 次迭代所得的第 i 组无粘结筋拉力增量; $k_j^{(N+1)}, k_j^{(N)}$ 分别为第 $N+1$ 次和第 N 次迭代所得的第 j 杆单元刚度, s 为设定的精度.

(6) 计算杆件内力和位移. 本文的计算方法, 既保证了无粘结筋的纵向变形协调, 又满足了梁内力与刚度的关系, 是普遍适用的方法.

图 8 为文[1]中梁 A-4, A-5, A-6 的荷载-跨中挠度关系曲线, 图中 Q, Q_{\max} 为实验中三分点

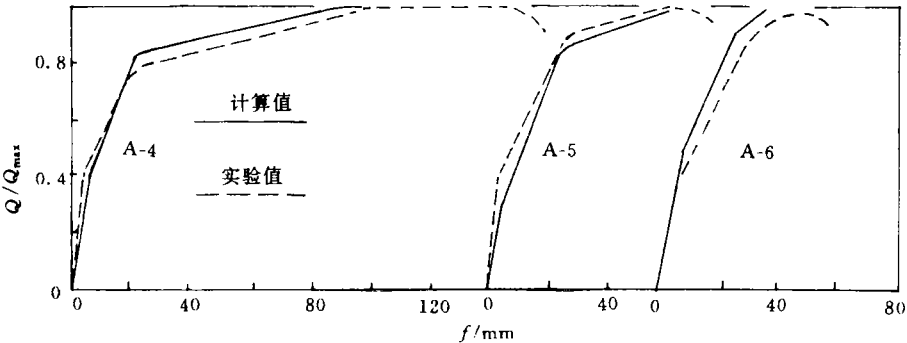


图 8 梁的荷载-挠度关系曲线

荷载和破坏荷载. 图 9 为其荷载-无粘结筋应力增量 $\Delta\sigma_p$ 的关系曲线. 梁的两个横力弯曲段各等分为 10 个单元, 纯弯曲段为 1 个单元. 理论计算的结果与试验值吻合得较好, 这说明本方法具有较好的精度. 由于本方法不能计算水平段和下降段位移, 故极限位移有较大的误差. 表 1 为极限状态的试验值和理论值, 理论的极限状态指的是梁中某单元的砼压应变为 ϵ_{cu} , 即 $\Phi_x = \epsilon_{cu}$.

表 1 梁极限状态下的试验值和理论值

梁 号	F/kN		$\Delta\sigma_p/\text{MPa}$		f/mm	
	试验值	理论值	试验值	理论值	试验值	理论值
A-4	27.6	23.9	596	587.9	140	101.1
A-5	36.5	34.4	505	499.7	83	70.1
A-6	51.7	48.5	209	236.5	48	40.2

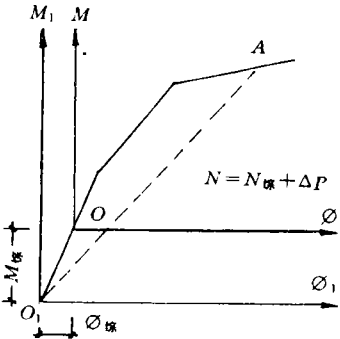


图 7 梁的计算起点及新值刚度

连续梁的形式多种多样,本文只分析其边跨和中跨.边跨和中跨的受力状态可简化为图

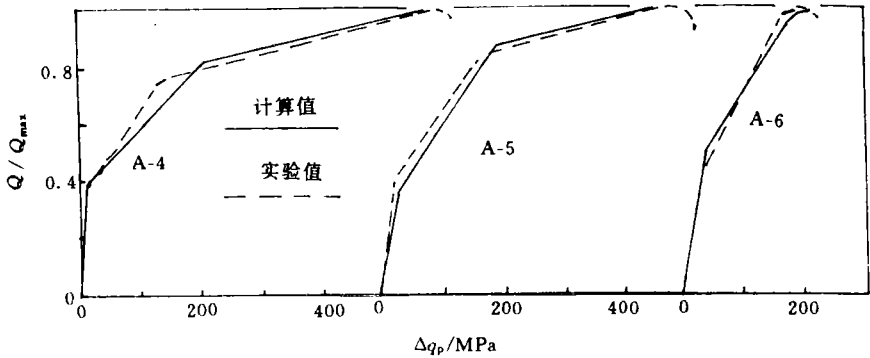


图 9 梁的荷载-无粘结筋应力增量关系曲线

10,11. 由边跨和中跨无粘结筋应力增量可估算出连续梁中的应力增量.分三种不同配筋、两种不同跨高比对边跨、中跨梁作了计算.计算参数如下:砼 $f_c=33.66\text{ MPa}$;钢筋 $f_s=400\text{ MPa}$, $E_s=2.05\times10^5\text{ MPa}$;无粘结筋 $\sigma_e=1\,200\text{ MPa}$, $\epsilon_e=5.85\times10^{-3}$, $\sigma_{0.2}=1\,465\text{ MPa}$, $\epsilon_{0.2}=9.14\times10^{-3}$, $\sigma_{pu}=1\,790\text{ MPa}$, $\epsilon_{pu}=0.04$;有效预应力 $\sigma_{pe}=900\text{ MPa}$;截面 $b=0.3\text{ m}$, $h=0.6\text{ m}$,

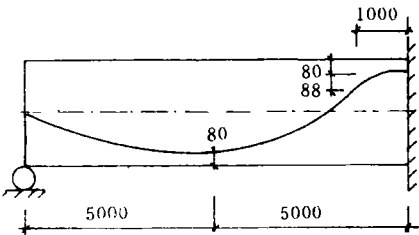


图 10 边跨梁的几何尺寸和计算简图

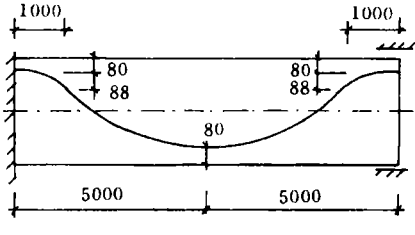


图 11 中跨梁的几何尺寸和计算简图

$h_s=0.55\text{ m}$;梁上作用均布荷载为 q .表 2 为边跨和中跨梁,在不同配筋指标 $q_0^{(1)}$ ($q_0=(A_p\sigma_{pe}+A_s f_s)/bh_p f_c$, A_p 为预应力筋面积, h_p 为梁顶至预应力筋的距离)和不同跨高比下的极限状态力学参数.梁等分为 20 个单元. $A_{s中}$, $A_{s支}$ 分别为跨中和固定端处受拉钢筋面积,边跨梁和中跨梁的配筋相同.配筋①中 $A_p=250\text{ mm}^2$, $A_{s中}=330\text{ mm}^2$, $A_{s支}=500\text{ mm}^2$;配筋②为配筋①乘以 1.85;配筋③为配筋①乘以 2.7;相当于低、中、高三种配筋. $q_{0中}$, $q_{0支}$ 分别为跨中和固定端处的配筋指标.跨高比 I 为图 10,11 的跨高比.保持无粘结筋、非预应力筋和砼的相对位置不变,配筋指标不变,截面为 $0.15\text{ m}\times0.3\text{ m}$, A_p , A_s 相应减小 4 倍,即跨高比 I_2 比跨高比 I_1 大 1 倍.表 2 中 $\Delta\sigma_{p1}$ 和 $\Delta\sigma_{p2}$ 分别为边跨梁、中跨梁的无粘结筋应力增量 $\Delta\sigma_p$; $\Delta\sigma_{p中}$, $\Delta\sigma_{p支}$ 分别为 $q_{0中}$, $q_{0支}$ 代入文[2]中式(9)的计算值 ($\Delta\sigma_p=600-2\,000q_0\text{ MPa}$).

表 2 边跨和中跨梁的力学参数

配筋	$q_{0中}$	$q_{0支}$	$\Delta\sigma_{p1}/\text{MPa}$		$\Delta\sigma_{p2}/\text{MPa}$		$\Delta\sigma_{p中}/\text{MPa}$	$\Delta\sigma_{p支}/\text{MPa}$
			I_1	I_2	I_1	I_2		
①	0.068	0.081	456	430	412	410	464	438
②	0.126	0.15	333	339	309	317	348	300
③	0.184	0.219	253	264	239	251	232	162

表 2 中 $\Delta\sigma_p$ 明显地低于三分点加载的 $\Delta\sigma_p^{(1)}$,而接近于跨中集中荷载作用下 $\Delta\sigma_p^{(2)}$.跨高

比对梁的 $\Delta\sigma_p$ 无明显影响. 中跨的 $\Delta\sigma_p$ 小于边跨的 $\Delta\sigma_p$, 原因在于中跨的无粘结筋两次穿过中性层, 而边跨的只有一次穿过中性层.

5 结论

(1) 跨高比对抛物线型的无粘结筋应力增量影响较小, 可忽略不计.

(2) 无粘结筋应力增量主要取决于配筋指标, 无粘结筋穿过中性层次数对应力增量有一定影响, 其范围可认为在 10% 以内.

(3) 边跨梁的 $\Delta\sigma_p$ 可按 $\Delta\sigma_{p\oplus}$ 计算, 中跨梁的 $\Delta\sigma_p$ 可按 $\Delta\sigma_{p\boxminus}$ 计算, 总体上可认为连续梁的 $\Delta\sigma_p$ 可由平均配筋指数按文〔2〕中式(9)计算. 对直线型无粘结筋而言, 在所有的荷载形式中, 跨中集中荷载作用下在梁上产生的变形最小, 亦即 $\Delta\sigma_p$ 最低. 曲线型无粘结筋有一部分处于梁低应变区, 甚至可能有小部分处于梁的受压区, 所以, 其平均应变较小, 与直线型的相近. 这一结论有明显的合理性.

参 考 文 献

- 1 杜拱辰, 陶学康. 部分预应力混凝土梁无粘结筋极限应力的研究. 建筑结构学报, 1985, (6): 2~13
- 2 王逸, 杜拱辰, 刘永颐. 跨中集中荷载下部分预应力梁无粘结筋极限应力的研究. 建筑结构学报, 1991, (6): 42~52
- 3 房贞政, 宗周红. 无粘结预应力筋极限应力的变形协调系数法. 土木工程学报, 1995, (1): 55~65
- 4 杜拱辰. 部分预应力混凝土. 北京: 中国建筑工业出版社, 1990. 89~93
- 5 方德平, 林雨生. 部分预应力砼连续梁的弯矩-曲率分析法. 华侨大学学报(自然科学版), 1996, 17(3): 260~265
- 6 方德平, 林雨生. 预应力框架中无粘结筋应力增量的弹性分析. 华侨大学学报(自然科学版), 1996, 17(2): 162~165

Bending Moment-Curvature Method for Analysing Stress Increment of Unbonded Tendon in Partially Prestressed Concrete Beam

Fang Deping

(Dept. of Civil Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract A generally applicable method is formed for calculating stress increment of unbonded tendon in a beam. The method satisfies both to the compatibility conditions of longitudinal deformation and the $N-M-\Phi$ relation of beam section. The results of calculation accord well with experimental results as already known. As shown by the calculation on stress increment of parabolic unbonded tendon in statically indeterminate beam, the effect of span-depth ratio is fairly small and the stress increment approximately equals to that of a straight unbonded tendon under midspan concentrated load.

Keywords beam, partially prestressed concrete, unbonded tendon, bending moment, curvature, ultimate stress