

剪力滞后对开口薄壁杆件侧向稳定的影响*

王全凤^① 李华煜^②

(^①华侨大学土木工程系, 泉州 362011; ^②香港理工大学土木与结构工程系, 香港九龙)

摘要 提出一种简单而有足够精度的方法, 以探讨开口薄壁杆件中由杆壁中面上的剪应变引起的剪力滞后现象对其侧向稳定的影响. 首先建立一个考虑杆件扭转和翘曲, 特别是考虑杆壁中面上剪应变的能量方程. 这个方程可适用于任意横向荷载、任意边界条件下和任意棱形开口薄壁杆件的侧向稳定分析. 利用 Galerkin 加权余量法解一些典型的数值例题, 并与已知的试验结果和有限单元法的计算结果吻合很好. 最后详细讨论了反映剪力滞后现象的杆壁中面上剪应变对开口薄壁杆件侧向稳定的影响.

关键词 剪力滞后, 侧向屈曲, 开口薄壁杆件

分类号 TU 311.2

经典的薄壁杆件侧向稳定分析是建立在 Timoshenko 和 Vlasov 薄壁杆件理论上^[1,2], 但其忽略了由于翘曲引起的杆壁中面上的剪应变影响, 因而不能反映剪力滞后现象. 尽管意识到闭口薄壁杆件的剪力滞后现象已有几十年, 但研究很少集中在开口薄壁杆件中杆壁中面上的剪应变对它的侧向稳定的影响. 如果考虑了这个剪应变, 将使数学方面的问题变得复杂, 导致出现一个未知翘曲函数的偏微分方程, 而得不到它的闭合解^[3]. 如果这个剪应变对侧向稳定的影响是大的, 一个快速评价其影响的方法对开口薄壁杆件结构的初步设计是重要的. 在设计过程中, 由于杆件最后的截面可能变化, 在这个设计阶段使用计算机进行复杂计算既不可行也不经济. 很有必要提出一种简单而实用的方法来估计杆壁中面上的剪应变对其侧向稳定的影响.

1 能量方程

考虑图 1 所示的开口薄壁杆件. 图中 s 是曲线坐标, t 是杆壁的厚度, c 是截面的剪切中心, $\rho(s)$ 是截面的剪切中心至过任意点 s 切线的距离. 本文建立在下面假设的基础上.

(1) 薄壁杆件的截面在它自身平面内的刚度是无限的. 根据 Vlasov 这个假设, 杆壁中心线上任意一点的切向位移为

$$d(s, z) = \rho(s)\Phi(z), \quad (1)$$

式中 $\Phi(z)$ 是截面绕 z 轴的转角.

* 本文 1996-05-16 收到; 香港 UPGC 基金资助项目

(2) 平行于 x 轴和 y 轴的横向正应力 σ_x 和 σ_y 比纵向正应力 σ_z 小得多, 故可据 Hooke 定律, 得纵向正应变为 $\epsilon_z \approx \sigma_z/E$, 式中 E 是 Young 氏弹性模量.

(3) 采用 Kollbrunner 和 Hajdin 的翘曲位移假设, 即薄壁杆件中翘曲位移的分布为⁽⁴⁾

$$w(s, z) = -\omega(s)\theta(z), \quad (2)$$

式中 $\theta(z)$ 是表示翘曲沿杆件长度方向分布的函数; $\omega(s)$ 是关于截面剪切中心的扇形坐标, 即

$$\omega(s)\epsilon_w = \int_0^s \rho(s)ds. \quad (3)$$

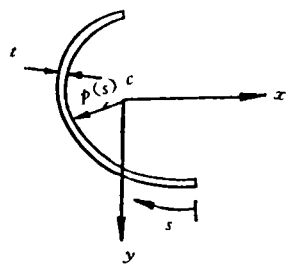


图1 开口薄壁杆件断面

1.1 纵向正应变

根据弹性理论, 由翘曲引起截面中心线上的正应变为

$$\epsilon_w = \partial w / \partial z = -\omega\theta', \quad (4)$$

由于施加横向荷载引起的杆件扭转在 x 方向产生的附加应变 u 引起的纵向正应变为⁽⁵⁾

$$\epsilon_u = -xu''. \quad (5)$$

1.2 剪应变

因为忽略了薄壁杆件中弯曲引起的剪应变, 薄壁杆件中的剪应变由翘曲和自由扭转引起的两部份剪应变组成. 由翘曲引起的剪应变为⁽¹⁾ $\gamma_{zs} = \partial/\partial z + \partial w/\partial s = \rho\Phi' - \partial\omega/\partial s \theta$; 把式(3)代进此式, 得

$$\gamma_{zs} = \rho(\Phi' - \theta). \quad (6)$$

当翘曲是无约束时, 仅仅有所谓 St. Venant 应变. 一般地说, 在开口薄壁杆件中, 自由扭转剪应变沿壁厚线性分布并与扭转角率有关, 即

$$\gamma_{zs} = 2n\Phi', \quad (7)$$

式中 n 是从截面中心线到截面上任一点距离.

把式(4)、(5)及式(6)、(7)分别线性组合, 得薄壁杆件截面上任一点的纵向正应变和剪应变分别为

$$\epsilon = -xu'' - \omega\theta', \quad (8)$$

$$\gamma = 2n\Phi' + \rho(\Phi' - \theta). \quad (9)$$

薄壁杆件变形时的应变能一般表达为

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{\Sigma} (E\epsilon^2 + G\gamma^2) t ds dz, \quad (10)$$

式中 G 为剪切弹性模量. 把式(8)、(9)代进式(10)并注意到 $I_y = \int_{\Sigma} x^2 t ds$ 为截面关于 y 轴的惯性矩; $I_w = \int_{\Sigma} \omega^2 t ds$ 为截面的翘曲常数; $J = \int_{\Sigma} 4n^2 t ds$ 为截面的 St. Venant 扭转常数; $I_p = \int_{\Sigma} \rho^2 t ds$ 为截面关于剪切中心极惯性矩. 因为翘曲位移对 y 轴不产生净矩⁽⁶⁾, 所以 $\int_{\Sigma} x\omega t ds = 0$. 对棱形截面的开口薄壁杆件, 则有 $\int_{\Sigma} 2n\rho t ds = 0$. 因而式(10)可被改写为

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l [EI_y(u'')^2 + EI_w(\theta')^2 + GJ(\Phi')^2 + GI_p(\Phi' - \theta)^2] dz. \quad (11)$$

按外力势能的定义,即外荷载与其相应位移的乘积取负值,可得薄壁杆件的外力势能为

$$V = - \int_0^l \int_{\Sigma} T_i \Delta_i t ds dz, \quad (12)$$

式中 T_i 是作用在 y - z 平面上的保守面力系; Δ_i 是相应于此力系的位移. 杆件的势能为它的应变能和它的荷载势能的和,即

$$\Pi = U + V, \quad (13)$$

结构处于随遇平衡状态时,薄壁杆件的势能为驻值,即 $\delta \Pi = 0$. 把式(11), (12)代进式(13)得

$$\delta \left\{ \frac{1}{2} \int_0^l [EI_y (u'')^2 + EI_w (\theta')^2 + GJ (\Phi')^2 + GI_p (\Phi' - \theta)^2] dz - \int_0^l \int_{\Sigma} T_i \Delta_i t ds dz \right\} = 0. \quad (14)$$

上式的侧向稳定能量方程适用于任意棱形截面的开口薄壁杆件,在任意横向荷载体系作用和任意边界条件下的侧向稳定分析.

2 侧向稳定的特征方程

从本质上讲,能量法与建立在力平衡和位移相容条件下的其它方法,没有本质上的区别. 为了简便起见,以图2所示的一个简支、双轴对称、跨中受横向点荷载作用的开口薄壁杆件为例. 由于结构对称,故仅取半结构进行稳定分析.

当荷载作用在截面形心时,外力势能为

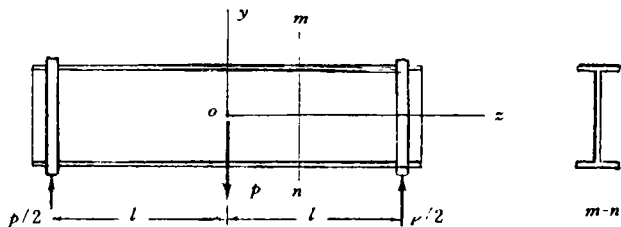


图2 开口薄壁杆件和它的荷载系

$$V = - P \int_0^l \Phi \cdot u'' (l - z) dz, \quad (15)$$

把式(15)代进式(14),得

$$\delta \left\{ \frac{1}{2} \int_0^l [EI_y (u'')^2 + EI_w (\theta')^2 + GJ (\Phi')^2 + GI_p (\Phi' - \theta)^2 - 2P \Phi u'' (l - z)] dz \right\} = 0. \quad (16)$$

对于本文分析对象,式(16)的侧向曲率 u'' 能借助于下式消去⁽⁷⁾

$$EI_y u'' - P(l - z) \Phi = 0, \quad (17)$$

然后可得

$$\delta \left\{ \frac{1}{2} \int_0^l [GJ (\Phi')^2 + EI_w (\theta')^2 + GI_p (\Phi' - \theta)^2 - P^2 / EI_y (l - z)^2 \Phi^2] dz \right\} = 0. \quad (18)$$

变分后,开口薄壁杆件侧向稳定的控制方程组为

$$GJ \Phi'' + GI_p (\Phi' - \theta)' + P^2 (l - z)^2 / EI_y \Phi = 0, \quad (19)$$

$$EI_w \theta'' + GI_p (\Phi' - \theta) = 0, \quad (20)$$

以及相应的边界条件为

$$GJ \Phi' + GI_p (\Phi' - \theta) = 0 \text{ 或 } \Phi = \text{const}, \quad (21)$$

$$EI_w \theta = 0 \text{ 或 } \theta = \text{const}, \quad (22)$$

从式(19)可以得到

$$\theta' = \mu \Phi'' + P^2/(EI_y GI_p)(l-z)^2 \Phi, \quad (23)$$

式中 $\mu=1+J/I_p$ 为截面翘曲程度系数. 对上式分别对 z 微分 2 次, 可得

$$\theta'' = \mu \Phi'''' + P^2[-2(l-z)\Phi + (l-z)^2 \Phi']/(EI_y GI_p), \quad (24)$$

$$\theta''' = \mu \Phi''''' + P^2[2\Phi - 4(l-z)\Phi' + (l-z)^2 \Phi'']/(EI_y GI_p). \quad (25)$$

从式(19)和(20)中消去 $(\Phi' - \theta)$, 得

$$-GJ\Phi'' + EI_w \theta'' - P^2(l-z)^2/EI_y \Phi = 0; \quad (26)$$

把式(25)代进式(26), 得

$$\begin{aligned} \mu \Phi'''' - k^2 \Phi'' = & P^2/(E^2 I_w I_y) \{ (l-z)^2 \Phi - \alpha^2 [2\Phi \\ & - 4(l-z)\Phi' + (l-z)^2 \Phi''] \} \end{aligned} \quad (27)$$

式中 $k^2=GJ/EI_w$ 为薄壁杆件约束扭转特征系数; $\alpha^2=EI_w/GI_p$; 从式(20)和式(21)中第一式消去 $(\Phi' - \theta)$, 在边界条件下可得

$$\theta'' - k^2 \Phi = 0, \quad (28)$$

把式(24)代进式(28), 得

$$\mu \Phi'''' - k^2 \Phi = -\alpha^2 P^2/(E^2 I_w I_y) [-2(l-z)\Phi + (l-z)^2 \Phi']. \quad (29)$$

再把式(23)代进式(22)中第一式, 得

$$\mu \Phi'' = -\alpha^2 P^2/(E^2 I_w I_y)(l-z)^2 \Phi. \quad (30)$$

当薄壁杆件侧向屈曲时, 经过多次尝试再也不能求得比它更小的那个最小特征值, 叫做临界荷载值, 用 P_{cr} 表示. 引进无量纲量 $\xi=(l-z)/l$, $\lambda^*=P_{cr}/P_e$, $(P_e)^2=(E^2 I_w I_y)/l^6$, 则式(27)可被改写为

$$\mu \Phi''''(\xi) - k^2 l^2 \Phi''(\xi) = (\lambda^*)^2 [\xi^2 \Phi - \alpha^2/l^2 (2\Phi + 4\xi \Phi'(\xi) + \xi^2 \Phi''(\xi))]. \quad (31)$$

考虑到杆件屈曲模态的对称, 则半结构的边界条件为

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi''(0) = 0; \quad (32)$$

$$\Phi'(1) = 0, \mu \Phi'''(1) - k^2 l^2 \Phi'(1) = \alpha^2/l^2 (\lambda^*)^2 [2\Phi(1) + \Phi'(1)]; \quad (33)$$

式(31)是一个常微分方程特征值问题.

3 特征值问题的数值解

因为根据能量原理, 从变分法推导出来的开口薄壁杆件侧向稳定特征方程是具有边值的四阶常微分方程. 直接求它的闭合解是很困难的, 甚至是不可能的. 最常用的是数值求解. 在众多的数值方法中, Galerkin 加权余量法认为是最方便的一种^[8]. Galerkin 加权余量法要求相应于权函数 η_i 的余量权平均满足正交条件, 即得到了一组能确定未知参数的代数方程, 即

$$AC = \lambda BC, \quad (34)$$

式中 C 为未知参数 C_i 的向量, A 和 B 是由下列矩阵元素 a_{jk} 和 b_{jk} 组成的方阵. 若广义坐标 η_i 选择为三角函数的形式 $\sin m\pi\xi/2$, 则

$$\begin{aligned} a_{jk} = & 0 & j \neq k, \\ a_{jk} = & (\mu m^4 \pi^4/2^4 + k^2 l^2 m^2 \pi^2/2^2)/2 & j = k. \end{aligned} \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} b_{jk} &= [1/6 + 1/(m^2\pi^2)](1 + \alpha^2/l^2 m^2\pi^2/2^2), & j = k, \\ b_{jk} &= (2^2/\pi^2)[(-1)^{1/2(m-n)}/(m-n)^2 - (-1)^{1/2(m+n)}/(m+n)^2] \\ &\quad \times (1 + \alpha^2/l^2 m^2\pi^2/2^2) - 2m\alpha^2/l^2[(-1)^{1/2(m+n)}/(m+n) \\ &\quad + (-1)^{1/2(m-n)}/(m-n)] + 2\alpha^2/l^2, & j \neq k, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

根据式(34), 开口薄壁杆件的横向点荷载特征值 λ 作为满足下式的一个最小正根可求得

$$\det|A - \lambda B| = 0. \quad (37)$$

4 数值例子

因为薄壁工字型梁是建筑物和桥梁工程传统广泛使用的结构构件, 为了便于与文[7]的试验结果, 以及文[9]的有限单元法计算结果比较, 仍然选用图 2 的工字型梁作为数值例子. 所有这些例子的原始数据都来自

表 1 不同方法得到的 P_{cr} 值比较

项 目	文[7]的例		文[9]的例	
	试验	本文方法	有限单元法 (2×10 网格)	本文方法
P_{cr}/N	707.8	681.0	3.26×10^5	3.34×10^5
$\delta/(\%)$	3.78		-2.46	

从表 1 可看出, 用本文方法得到的工字型梁侧向失稳时的临界点荷载值非常接近于文[7]的试验结果和文[9]中的有限单元法计算值, 它们的相对误差(δ)见表 1.

5 杆壁中面上的剪应变对侧向稳定的影响

如果沿着杆壁中面上的剪应变被忽略, 式(31)可被简化为

$$\Phi''''(\xi) - k^2 l^2 \Phi'' = (\lambda^*)^2 \xi^2 \Phi. \quad (38)$$

选择与上节相同的例子来说明杆壁中面上剪应变对侧向稳定的影响. 根据文[8]的研究, 可得

$$(\lambda^*)^2 = a_{11}/b_{11}, \quad (39)$$

式(39)中 $a_{11} = (\pi^4/2^4 + k^2 l^2 \pi^2/2^2)/2$, $b_{11} = 1/6 + 1/\pi^2$. 考虑与不考虑这个剪应变的不同结果列在表 2. 从表 2 中看出, 杆壁中面上的剪应变对横向临界荷载的影响比较小.

表 2 杆壁中面上的剪应变对 P_{cr} 值(N)的影响

项目	文[7]的例	文[9]的例
忽略了 γ_{xx}	681.024 6	334 340. 2
考虑了 γ_{xx}	680.992 7	334 090. 9
$\delta/(\%)$	0.01	0.08

6 结论

(1) 推导出开口薄壁杆件在侧向荷载作用下的能量方程, 考虑了截面扭转、翘曲和杆壁中面上剪应变的影响. 它适用于任意棱形截面的开口薄壁杆件, 在任意横向荷载和任意边界条件下的侧向稳定分析.

(2) 用 Galerkin 加权余量法得到简支、双轴对称的工字型梁的横向临界点荷载与已知的试验值和有限单元法的计算结果比较可知, 它们吻合得很好.

(3) 由翘曲位移引起的杆壁中面上的剪应变对开口薄壁杆件侧向稳定的影响是较小的.

对于如 Vlasov 定义的开口薄壁杆件,这个影响完全可被忽略.这样,用本文方法得到计算开口薄壁杆件侧向失稳时的临界荷载公式较简单,从而把一个复杂的工程实际问题转化成为一个只需解一元方程的简单问题.

参 考 文 献

- 1 Vlasov V Z. Thin-walled elastic beams. 2nd ed. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1961. 357~397
- 2 Timoshenko S P, Gere J M. Theory of Elastic Stability. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Co., 1961. 77~181
- 3 Mentrasti L. Torsion of closed cross-section thin-walled Beams the influence of shearing strain. J. Thin-Walled Structures, 1987, (5): 277~305
- 4 Hu Y, Chen B. A consistent theory for torsion of thin-walled bars. J. Thin-Walled Structures, 1989, (7): 119~137
- 5 Yong L P, Trahair N S. Energy equation for Beam lateral buckling. J. of Struct. Engrg, ASCE, 1992, 118 (6): 1462~1479
- 6 Gelin S, Lee G C. Finite elements available for the analysis of non-curved thin-walled structures: Finite Element Analysis of Thin-Walled Structures. London: Elsevier Applied Science, 1988. 1~30
- 7 Thevendran V, Shanmugam N E. Lateral buckling of doubly symmetric beams containing openings. J. of Engrg. Mech., ASCE, 1991, 117(7): 1427~1441
- 8 王全凤, 李华煜. 薄壁杆件侧向稳定的近似闭合解. 工程力学, 1996, 13(2): 24~33
- 9 Away H U, Jonson C P, Will A M. Lateral and local buckling of Beams and frames. J. of the Struct. Div., ASCE, 1978, 103(9): 1821~1832

Effect of Shearing Lag on Lateral Stability of Thin-Walled Open Member

Wang Quanfeng^① Li Huayu^②

(^①Dept. of Civ. Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou;

^②Dept. of Civ. & Struct. Eng., Hong Kong Polytech. Univ., Hong Kong)

Abstract The effect of shearing lag on lateral stability of thin-walled open member is studied by a simple method with sufficient accuracy. The shearing lag is reflected by shearing strain in the middle surface of the wall. Taking torsion and warping of the member, especially, shearing strain in the middle surface of the wall into account, an energy equation is formed. The equation is applicable to the lateral stability analysis of arbitrary prismatic thin-walled open member under arbitrary lateral load and boundary condition. By applying Galerkin's method of weighted residuals, some typical numerical examples are solved. The results are in good agreement with those from experiment and calculation by finite element method. The effect of shearing strain in the middle surface of the wall on the buckling is discussed in detail.

Keywords shearing lag, lateral stability, thin-walled open member