

# 随机激振下双层减振问题的分析\*

常 辉 兰

(西江大学物理系, 广东肇庆 526061)

**摘要** 利用随机振动理论对双层减振问题进行探讨, 推导出双自由度系统质点绝对加速度及相对位移均方值的函数表达式. 给出了系统响应与系统结构参数间的关系曲线, 并得出随机激振下双层减振系统结构参数的确定方法.

**关键词** 双层减振, 随机振动, 结构参数

**分类号** TB 535.1

电子设备和元件的隔振问题一直是结构设计的一项重要课题. 一般的电子设备插箱就其整体而言, 隔振要求不高, 采用业已成熟的单级减振设计就能满足要求. 但对于插箱中耐振性能差的元件(例如可变电容器、压电晶体、玻璃、陶瓷元器件)的隔振要求就很严格, 单级减振往往不能满足工作和运输环境的要求. 即使设计出了满足要求的单级减振器, 也由于这样的减振器尺寸太大或成本高而难以采用. 这个问题对于飞机、导弹、火箭等所承载的电子设备尤为突出, 有效的解决办法是采用双层减振系统.

双层减振系统一般用于如下两种情况: (1) 电子设备插箱整体减振要求不高, 但箱中有个别耐振性能差的元件. 此时, 对于插箱采用刚度大的一级减振器, 而对于个别耐振性差的元件则采用刚度小的二级减振器, 从而形成双层减振; (2) 电子设备的支承结构本身刚度小(例如飞机机身), 此时不仅支承结构是电子设备的振源, 而且设备的运动也影响支承结构的运动. 在这种情况下, 必须对支承结构和电子设备所组成的结构体系实行双层减振.

## 1 双层减振系统的力学模型

将双层减振系统的质量简化为两个位于质心的集中质量, 并只考虑被减振设备的竖向运动(即沿承载面法线的运动). 此时双层减振系统即被简化为双质量、双自由度的力学体系, 如图1所示. 图1中,  $m_1$  为一级减振质量,  $m_2$  为二级减振质量,  $k_1$ ,  $k_2$  和  $c_1$ ,  $c_2$  分别为减振系统的弹簧刚度和阻尼系数. 取承载基础、质点  $m_1$ ,  $m_2$  的静平衡位置  $o_0$ ,  $o_1$  和  $o_2$  作为图中振动系统的坐标原点, 则在振动过程中某一瞬时: 承载基础的绝对坐标为  $y_0$ ; 质点  $m_1$  的绝对坐标

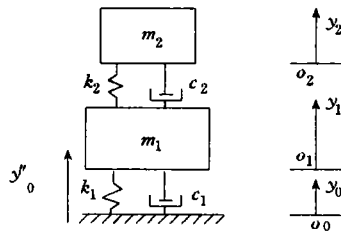


图1 双层减振系统的力学模型

\* 本文 1996-05-10 收到

为  $y_1$ ; 质点  $m_2$  的绝对坐标为  $y_2$ ;  $m_1$  相对于承载基础的坐标为  $\delta_1 = y_1 - y_0$ ;  $m_2$  相对于  $m_1$  的坐标为  $\delta_2 = y_2 - y_1$ .

## 2 双层减振系统需要解决的问题

如图 1 所示的力学模型中, 质量  $m_1, m_2$  和静平衡位置  $o_0, o_1$  和  $o_2$  一般为已知量, 所要确定的是双层减振系统的相对阻尼系数  $\xi_1$  和  $\xi_2$  及固有频率  $\omega_1$  和  $\omega_2$ .

本文研究的减振问题主要是被动减振, 即采用减振装置使作为振源的承载基础所产生的振动对设备的影响得以减弱, 而设备本身没有振源. 被动减振问题的目标是防止振动的最大位移造成破坏和最大加速引起故障, 如最大惯性力引起设备的工作性能失调.

因此, 双层减振的基本问题是: (1) 给定被减振设备的最大位移, 选取减振系统结构参数, 使得被减振设备的绝对加速度最小; (2) 给定被减振设备的最大绝对加速度, 选取减振系统的结构参数, 使得被减振设备的位移最小.

## 3 随机激振下双层减振系统的响应分析

首先作如下假设: (1) 承载基础的随机振动是平稳的; (2) 随机激振的概率密度符合高斯分布; (3) 双层减振系统是定常线性系统.

若基础输入的加速功率谱密度为理想白噪声  $Sy''_0(\omega) = S_0$  (常数), 且其均值为零.

据图 1, 系统相对基础的运动微分方程可表示为

$$m_1(y_1 - y_0)'' + c_1(y'_1 - y'_0) + k_1(y_1 - y_0) - k_2(y_2 - y_1) - c_2(y'_2 - y'_1) = -m_1y''_0, \quad (1)$$

$$m_2(y_2 - y_0)'' + c_2(y'_2 - y'_1) + k_2(y_2 - y_1) = -m_2y''_0, \quad (2)$$

令

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{k_1/m_1}; \omega_2 = \sqrt{k_2/m_2}, \\ \xi_1 &= c_1/(2\sqrt{k_1m_1}); \xi_2 = c_2/(2\sqrt{k_2m_2}), \\ \mu &= m_2/m_1. \end{aligned} \right\}$$

则方程简为

$$(y''_1 - y''_0) + 2\xi_1\omega_1(y'_1 - y'_0) + \omega_1^2(y_1 - y_0) - \omega_2^2\mu(y_2 - y_1) - 2\xi_2\omega_2\mu(y'_2 - y'_1) = -y''_0, \quad (3)$$

$$(y''_2 - y''_0) + 2\xi_2\omega_2(y'_2 - y'_1) + \omega_2^2(y_2 - y_1) = -y''_0, \quad (4)$$

为求系统的频率特性, 令

$$y''_0 = e^{j\omega t}, \quad (5)$$

则

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= y_1 - y_0 = H_{\delta_1}(\omega)e^{j\omega t}; \\ \delta_2 &= y_2 - y_1 = H_{\delta_2}(\omega)e^{j\omega t}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} y''_1 &= H_{y''_1}(\omega)e^{j\omega t}; \\ y''_2 &= H_{y''_2}(\omega)e^{j\omega t}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中  $H_{\delta_1}(\omega), H_{\delta_2}(\omega), H_{y_1}(\omega), H_{y_2}(\omega)$  是以基础的加速度  $y''_0$  为输入, 以  $m_1, m_2$  的相对位移  $\delta_1, \delta_2$  和加速度  $y''_1, y''_2$  为输出的频率响应函数, 其通式为

$$H(\omega) = \frac{-j\omega^3 B_3 - \omega^2 B_2 + j\omega B_1 + B_0}{\omega^4 A_4 - j\omega^3 A_3 - \omega^2 A_2 + j\omega A_1 + A_0}, \quad (8)$$

将式(3),(4)变换为

$$\left. \begin{aligned} \delta''_1 + 2\xi_1 \omega_1 \delta'_1 + \omega_1^2 \delta_1 - \omega_2^2 \mu \delta'_2 - 2\xi_2 \omega_2 \mu \delta'_2 &= -y''_0; \\ \delta''_2 + \delta''_1 + 2\xi_2 \omega_2 \delta'_2 + \omega_2^2 \delta_2 &= -y''_0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

将式(5),(6)代入, 整理后可解得

$$\left. \begin{aligned} H_{\delta_1}(\omega) &= \frac{1}{\Delta} [\omega^2 - j2(1+\mu)\xi_2 \omega_2 \omega - (1+\mu)\omega_2^2]; \\ H_{\delta_2}(\omega) &= \frac{1}{\Delta} [-j2\xi_1 \omega_1 - \omega_1^2]. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

将式(5),(7)代入式(3),(4), 整理后可解得

$$\left. \begin{aligned} H_{y_1}(\omega) &= \frac{1}{\Delta} [-j\omega^3 2\xi_1 \omega_1 - \omega^2(\omega_1^2 + 4\xi_1 \xi_2 \omega_1 \omega_2) \\ &\quad + j\omega(2\xi_1 \omega_1 \omega_2^2 + 2\xi_2 \omega_2 \omega_1^2) + \omega_1^2 \omega_2^2], \\ H_{y_2}(\omega) &= \frac{1}{\Delta} [4\omega^2 \xi_1 \xi_2 \omega_1 \omega_2 + j\omega(2\xi_1 \omega_1 \omega_2^2 + 2\xi_2 \omega_2 \omega_1^2) + \omega_1^2 \omega_2^2], \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中  $\Delta = \omega^4 - j\omega^3 [2\xi_1 \omega_1 + 2(1+\mu)\xi_2 \omega_2] - \omega^2 [\omega_1^2 + (1+\mu)\omega_2^2 + 4\xi_1 \xi_2 \omega_1 \omega_2] + j\omega [2\xi_1 \omega_1 \omega_2^2 + 2\xi_2 \omega_2 \omega_1^2] + \omega_1^2 \omega_2^2$ .

将式(10),(11)与式(8)比较, 得出式(8)中的系数  $A_i$  如下:

$A_0 = \omega_1^2 \omega_2^2$ ;  $A_1 = 2\xi_1 \omega_1 \omega_2^2 + 2\xi_2 \omega_2 \omega_1^2$ ;  $A_2 = \omega_1^2 + (1+\mu)\omega_2^2 + 4\xi_1 \xi_2 \omega_1 \omega_2$ ;  $A_3 = 2\xi_1 \omega_1 + 2(1+\mu)\xi_2 \omega_2$ ;  $A_4 = 1$ .

系数  $B_i$  见附表.

附表 式(8)中系数  $B_i (i=0, 1, 2, 3)$  的对应关系

$B_i$	$H_{\delta_1}(\omega)$	$H_{\delta_2}(\omega)$	$H_{y_1}(\omega)$	$H_{y_2}(\omega)$
$B_0$	$-(1+\mu)\omega_2^2$	$-\omega_1^2$	$\omega_1^2 \omega_2^2$	$\omega_1^2 \omega_2^2$
$B_1$	$-2(1+\mu)\xi_2 \omega_2$	$-2\xi_1 \omega_1$	$2\xi_1 \omega_1 \omega_2^2 + 2\xi_2 \omega_2 \omega_1^2$	$2\xi_1 \omega_1 \omega_2^2 + 2\xi_2 \omega_2 \omega_1^2$
$B_2$	$-1$	$0$	$\omega_1^2 + 4\xi_1 \xi_2 \omega_1 \omega_2$	$-4\xi_1 \xi_2 \omega_1 \omega_2$
$B_3$	$0$	$0$	$2\xi_1 \omega_1$	$0$

质点  $m_1, m_2$  的相对位移  $\delta_1, \delta_2$  的均方值和绝对加速度  $y''_1, y''_2$  的均方值分别为<sup>[1]</sup>

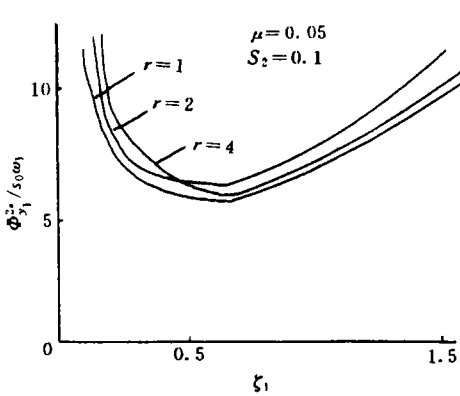
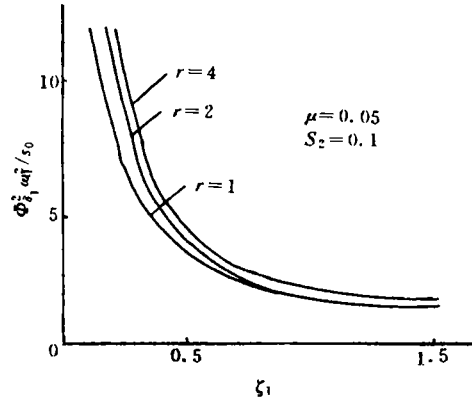
$$\left. \begin{aligned} \Phi_{\delta_1}^2 &= S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H_{\delta_1}(\omega)|^2 d\omega; \quad \Phi_{\delta_2}^2 = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H_{\delta_2}(\omega)|^2 d\omega, \\ \Phi_{y_1}^2 &= S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H_{y_1}(\omega)|^2 d\omega; \quad \Phi_{y_2}^2 = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H_{y_2}(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

由上述分析可见,  $\xi_1, \xi_2, \omega_1, \omega_2$  及  $\mu$  是影响系统响应的主要参数. 为了研究这些参数对减振性能的影响, 下面对式(12)给定某些参数值, 作出响应的均方值和相对阻尼比  $\xi_i$  及频率比  $\gamma$

( $\gamma = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ ) 之间的关系曲线.

(1)  $\Phi_{y_1}^2 - \xi_1$  曲线和  $\Phi_{\delta_1}^2 - \xi_1$  曲线.

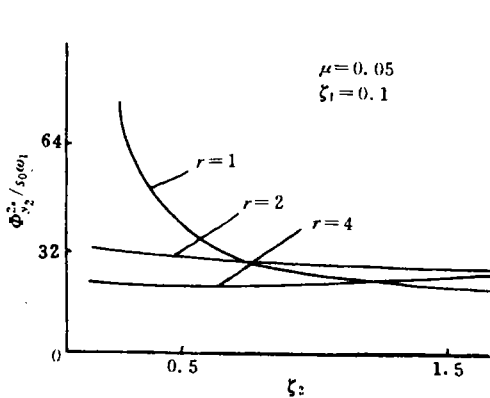
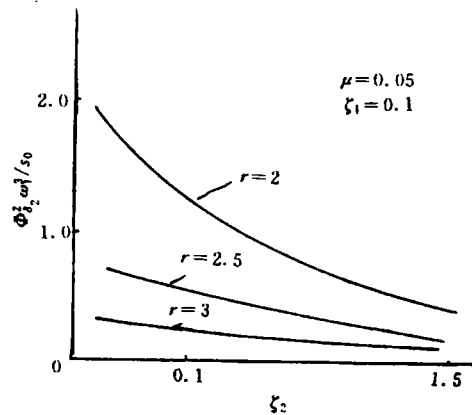
由  $\frac{\partial \Phi_{y_1}^2}{\partial \xi_1} = 0$  可得到  $\Phi_{y_1}^2$  对  $\xi_1$  的极小值, 而  $\Phi_{\dot{y}_1}^2$  则随  $\xi_1$  的增大而减小. 如取  $\xi_2 = 0.10, \mu = 0.05$  (实际工程中可实现的值),  $\gamma$  分别取 1, 2, 4, 由式(12)积分得  $\Phi_{y_1}^2 = f_1(\xi_1)$  和  $\Phi_{\dot{y}_1}^2 = f_2(\xi_1)$  两个关系式, 据此可作出  $\Phi_{y_1}^2 / \omega_1 S_0 - \xi_1$  和  $\Phi_{\dot{y}_1}^2 \omega_1^3 / S_0 - \xi_1$  曲线, 如图 2, 3 所示. 这两条曲线反映了结

图 2  $\Phi_{y_1}^2 / S_0 \omega_1$  与  $\xi_1$  的关系图 3  $\Phi_{\dot{y}_1}^2 \omega_1^3 / S_0$  与  $\xi_1$  的关系

构参数  $m_i, \xi_2, \gamma$  不变时,  $\xi_1$  对  $m_1$  的加速度均方响应及相对位移均方响应的影响.

(2)  $\Phi_{y_2}^2 - \xi_2$  曲线和  $\Phi_{\dot{y}_2}^2 - \xi_2$  曲线.

为突出分析  $\xi_2$  对  $\Phi_{y_2}^2$  和  $\Phi_{\dot{y}_2}^2$  的影响, 取  $\xi_1 = 0.10, \mu = 0.05, \gamma$  分别取不同值, 由式(12)可作出  $\Phi_{y_2}^2 / S_0 \omega_1 - \xi_2$  曲线和  $\Phi_{\dot{y}_2}^2 \omega_1^3 / S_0 - \xi_2$  曲线, 如图 4, 5 所示. 这两条曲线反映了结构参数  $m_i, \xi_1, \gamma$

图 4  $\Phi_{y_2}^2 / S_0 \omega_1$  与  $\xi_2$  的关系图 5  $\Phi_{\dot{y}_2}^2 \omega_1^3 / S_0$  与  $\xi_2$  的关系

不变时,  $\xi_2$  对  $m_2$  的加速度和相对位移的均方响应的影响.

(3)  $\Phi_{y_1}^2 / S_0 \omega_1 - \omega_2 / \omega_1$  曲线、 $\Phi_{y_2}^2 / S_0 \omega_1 - \omega_2 / \omega_1$  曲线、 $\Phi_{\dot{y}_1}^2 \omega_1^3 / S_0 - \omega_2 / \omega_1$  曲线和  $\Phi_{\dot{y}_2}^2 \omega_1^3 / S_0 - \omega_2 / \omega_1$  曲线.

依同样方法可分别作出上述曲线,如图6~9所示.

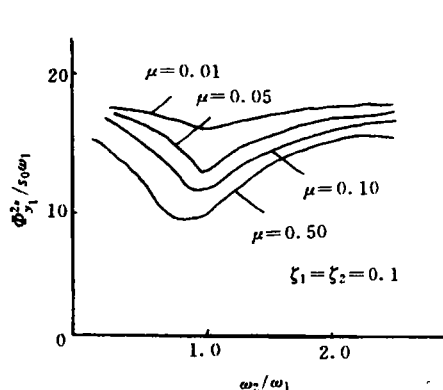


图6  $\Phi_{y_1}^2 / S_0 \omega_1$  与  $\omega_2 / \omega_1$  的关系

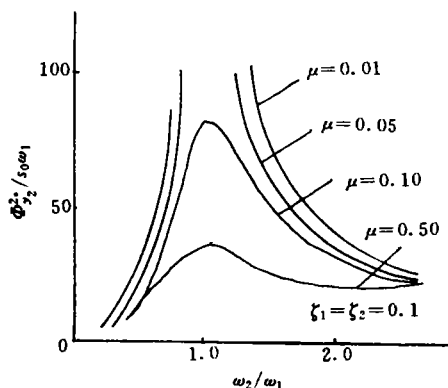


图7  $\Phi_{y_2}^2 / S_0 \omega_1$  与  $\omega_2 / \omega_1$  的关系

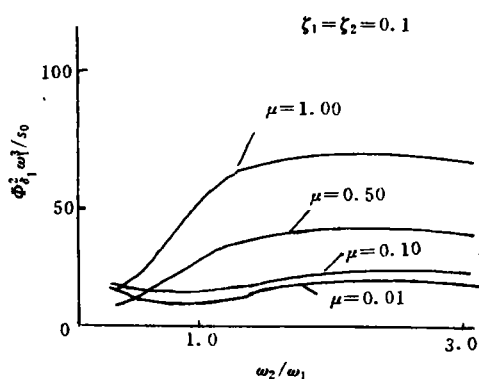


图8  $\Phi_{i_1}^2 \omega_1^3 / S_0$  与  $\omega_2 / \omega_1$  的关系

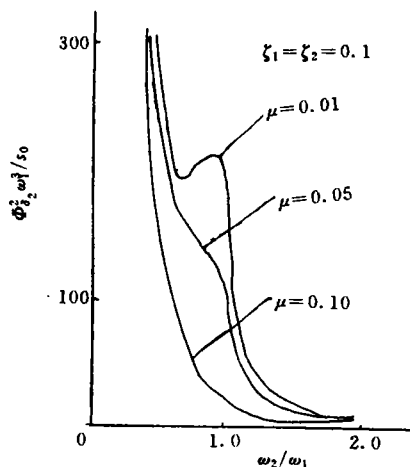


图9  $\Phi_{i_2}^2 \omega_1^3 / S_0$  与  $\omega_2 / \omega_1$  的关系

## 4 减振系统的相对阻尼系数和弹簧刚度的选取

### 4.1 相对阻尼系数 $\xi$ 的选取

由图2~5可知,为使  $\Phi_{y_1}^2$  取极小值,  $\xi_1$  应取在0.5邻域,为使  $\Phi_{i_1}^2$  取极小值,  $\xi_1$  应取大值,故  $\xi_1$  的取值范围约为0.1~1.0. 为使  $\Phi_{y_2}^2$  取极小值,  $\xi_2$  应取大值,但当  $\gamma > 2$  时,  $\xi_2$  值的影响不大,  $\Phi_{i_2}^2$  亦类似,故  $\xi_2$  亦可在0.1~1.0内取值. 总之,在实际设计中可以做到  $\gamma > 2$ ,故相对阻尼系数  $\xi_1, \xi_2$  均可在0.1~1.0内取值.

### 4.2 固有频率比 $\gamma$ 的选取

为使  $\Phi_{y_1}^2$  取极小值,  $\gamma$  必须取小值. 当  $\gamma > 2$  时,  $\Phi_{y_1}^2$  趋于较高稳定值,而  $\Phi_{i_1}^2$  基本不受  $\gamma$  的

影响. 为使  $\Phi_{\gamma_2}^2$  取极小值, 应有  $\gamma > 2$  或  $\gamma < 0.7$ ; 为使  $\Phi_{\delta_2}^2$  取极小值, 应有  $\gamma > 2$ , 此时,  $\Phi_{\delta_2}^2$  趋于零. 总之, 频率比  $\gamma$  应取大于 2 的值.

#### 4.3 质量比 $\mu$ 的选取

分析图 6~9 可知, 当  $\gamma > 2$  时,  $\mu$  ( $\mu \leq 0.05$ ) 对  $\Phi_{\gamma_1}^2$  及  $\Phi_{\delta_1}^2$  无明显影响.

### 5 双层减振系统结构参数的选取步骤

根据以上分析, 建议在实际设计中采用下述步骤, 选取结构参数. (1) 由  $\Phi_{\gamma_1}^2$  和  $\Phi_{\gamma_2}^2$ , 确定  $\xi_1$  和  $\xi_2$ . (2) 由  $\Phi_{\delta_1}^2$  和  $\Phi_{\delta_2}^2$ , 确定  $\omega_1$  和  $\omega_2$ . (3) 当考虑恒定过载时, 因激励是高斯分布, 则响应的峰值呈瑞利分布. 可利用  $3\sigma$  准则<sup>[2]</sup> 将  $\Phi_{\delta_i}^2 = \sigma_{\delta_i}^2$  (因激励的均值为零) 转换为  $\Delta l_{\max} = \delta_i + 3\sigma_{\delta_i}$ ; 式中  $\Delta l_{\max}$  为给定的  $m_i$  的相对位移;  $\delta_i$  为由恒定过载引起的  $m_i$  的相对位移值;  $\sigma_{\delta_i}$  为在随机激励下  $m_i$  的相对位移的均方根值. 因  $\Delta l_{\max}$  已知, 则  $\delta_i$  可根据具体结构的过载分析得到, 这样就确定了  $\sigma_{\delta_i}$  的值, 由  $\sigma_{\delta_i}^2 = \Phi_{\delta_i}^2$  即可选取最低频率  $\omega_i$  值. (4) 校核, 将预选的  $\xi_i$ ,  $\omega_i$  及  $\mu$  等值代入式 (12), 可检验是否满足给定条件.

### 6 结束语

随机激励下被动减振系统仅用无源器件还不能达到最佳减振效果, 在实际应用中, 对减振要求严格的电子设备宜考虑有源元件.

对被动双层减振系统, 用于评价减振性能的指标主要是双层质量的加速度均方响应  $\Phi_{\gamma_1}^2$  和  $\Phi_{\gamma_2}^2$ , 以及双层质量的相对位移的均方响应  $\Phi_{\delta_1}^2$  和  $\Phi_{\delta_2}^2$ . 影响这些指标的结构参数, 主要是相对阻尼系数  $\xi_1$  和  $\xi_2$  以及系统频率  $\omega_1$  和  $\omega_2$ .

#### 参 考 文 献

- 1 方 同. 工程随机振动. 北京: 国际工业出版社, 1995. 108~116
- 2 纽兰 D E 著. 随机振动与谱分析概论. 方 同译. 北京: 国防工业出版社, 1995. 158~174

## Analysis of Double-Layer Vibration Absorbing under Random Vibration Excitation

Chang Huilan

(Dept. of Phys., Xijiang Univ., 526061, Zhaoqing, Guangdong)

**Abstract** By applying random vibration theory, the author studies double-layer vibration absorbing in detail, and derives functional expression of the absolute acceleration of mass points in two degree-of-freedom system and the root-mean-square value of relative displacement; and gives relational curve between system response and structural parameter of system, and finally, obtains the method for defining structural parameter of double-layer vibration absorbing system under random vibration excitation.

**Keywords** double-layer, vibration absorbing, random vibration, structural parameter