一个造血模型周期解的存在性及唯一性*

王 全 义

(华侨大学管理信息科学系,泉州 362011)

摘要 研究一个造血模型的正周期解的存在性及唯一性等问题,并得到了这个方程存在唯一正的周期解的新结果.

关键词 微分积分方程,无穷时滞,周期解,存在性,唯一性

分类号 O 175.6

文〔1〕建立了血液红细胞的产生和生存的动力模型,即

$$dN(t)/dt = -rN(t) + a\exp(-\beta N(t-\tau)), (t \geqslant t_0), \tag{1}$$

其中 $\tau \in (0, +\infty)$;a, β, r 为正常数.文〔2〕推广为研究比(1)更为广泛的一类无穷时滞的微分积分方程

$$dN(t)/dt = -r(t)N(t) + a(t)\int_0^{+\infty} K(s)\exp(-\beta(t)N(t-s))ds, (t \geqslant t_0), \tag{2}$$

其中 $t_0 \in R$;$a(t), \beta(t), r(t)$ 是 R 上严格正的有界周期函数,它们有共同的周期 ω;$K(t): R_+ \to R_+$ 是分段连续滞后核,最终非增,并且满足

$$\int_0^{+\infty} K(s)ds = 1. \tag{3}$$

本文也研究方程(2)的 ω-周期解的存在性和唯一性等问题,所得结果推广了文〔2〕的有关结果.

1 解的估计

在本文中,我们假设下列条件成立:

(1) $r(t)$、$\beta(t)$ 是 R 上非负的连续 ω-周期函数,且

$$\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} r(t)dt = r_1 > 0. \tag{4}$$

而 $K(t)$、$a(t)$ 仍如前面所述.显然在本文中,并不要求 $r(t)$,$\beta(t)$ 是严格正的 ω-周期函数.由于

$$\exp(-\int_s^t r(\tau)d\tau) = \exp(-r_1(t-s)) \cdot \exp(-\int_s^t [r(\tau) - r_1]d\tau), \tag{5}$$

令

* 本文 1996-06-04 收到;福建省自然科学基金资助项目

$$m_1 \triangleq \inf\{\exp(-\int_s^t [r(\tau) - r_1] d\tau) : 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \omega\}, \tag{6}$$

$$M_1 \triangleq \sup\{\exp(-\int_s^t [r(\tau) - r_1] d\tau) : 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \omega\}, \tag{7}$$

所以,由式(4)~(7)可得

$$m_1 \exp(-r_1(t-s)) \leqslant \exp(-\int_s^t r(\tau) d\tau) \leqslant M_1 \exp(-r_1(t-s)), (t \geqslant s). \tag{8}$$

用 β_1,β_2 分别表示 $\beta(t)$ 的上确界和下确界,α_1 和 α_2 分别表示 $a(t)$ 的上确界和下确界. 设方程(2)的解 $N(t)$ 满足下列初始条件,即

$$\left.\begin{aligned} & N(s) = \varphi(s), s \in (-\infty, t_0], \varphi(t_0) > 0, \\ & \varphi(s) \in \Phi, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

其中 $\Phi=\{\varphi(s) : \varphi(s)\in C((-\infty,t_0],R_+), \|\Phi\| = \sup\{|\varphi(s)| : S\in(-\infty,t_0]\}\leqslant M\}$, $M>0$ 为常数.

于是由常数变易法可得,方程(2)满足初始条件(9)的解可表示为

$$\begin{aligned} N(t) =& \exp(-\int_{t_0}^t r(\tau) d\tau) N(t_0) + \int_{t_0}^t \exp(-\int_u^t r(\tau) d\tau) \\ & \times a(u) \int_0^{+\infty} K(s) \exp(-\beta(u) N(u-s)) ds du, (t \geqslant t_0), \end{aligned} \tag{10}$$

从而易见方程(2)满足初始条件(9)的解在 $t\geqslant t_0$ 上存在且是正解.

由于问题的实际意义,因此,我们只对方程(2)的正解感兴趣. 因此,下面只研究方程(2)的正解.

定理 1 设 $N(t)$ 是方程(2)满足初始条件(9)的任意正解,则存在 $T\geqslant t_0$,使得当 $t\geqslant T$ 时,有

$$N_1 < N(t) < N_2, \tag{11}$$

其中 $N_2=M_1\alpha_1/r_1+b$, $N_1=\dfrac{m_1\alpha_2 b_1 \exp(-\beta_1 N_2)}{r_1}$, $0<b_1,b<1$ 为常数.

证 由式(8),(10)可得

$$\begin{aligned} N(t) &\leqslant M_1 \exp(-r_1(t-t_0)) N(t_0) + M_1\alpha_1 \int_{t_0}^t \exp(-r_1(t-u)) \int_0^{+\infty} K(s) ds du \\ &\leqslant M_1 \exp(-r_1(t-t_0)) N(t_0) + \frac{M_1\alpha_1}{r_1}[1 - \exp(-r_1(t-t_0))] \\ &\to \frac{M_1\alpha_1}{r_1} \quad (\text{当 } t \to +\infty \text{ 时}). \end{aligned} \tag{12}$$

故对 $1>b>0$,存在着 $t_1>t_0$,使得当 $t\geqslant t_1$ 时,有

$$N(t) < M_1\alpha_1/r_1 + b \triangleq N_2. \tag{13}$$

因为 $\int_0^{+\infty} K(s) ds=1$,因此对于 $0<b_2<1$,存在 $c>0$,使得 $b_2=\int_0^c K(s) ds$. 又由常数变易法,可知

$$N(t) = \exp(-\int_{t_2}^t r(\tau) d\tau) N(t_2) + \int_{t_2}^t \exp(-\int_u^t r(\tau) d\tau)$$

$$\times a(u)\int_0^{+\infty}K(s)\exp(-\beta(u)N(u-s))\mathrm{d}s\mathrm{d}u \quad (t\geqslant t_2), \tag{14}$$

其中 $t_2\geqslant t_1+C$. 于是由式(8),(13),(14)可得

$$\begin{aligned}N(t) &\geqslant m_1\exp(-r_1(t-t_2))N(t_2)+m_1\alpha_2\int_{t_2}^{t}\exp(-r_1(t-u))\\ &\quad\times\int_0^{c}K(s)\exp(-\beta(u)N(u-s))\mathrm{d}s\mathrm{d}u\\ &\geqslant m_1\exp(-r_1(t-t_2))N(t_2)+m_1\alpha_2\exp(-\beta_1N_2)\\ &\quad\times\int_{t_2}^{t}\exp(-r_1(t-u))\int_0^{c}K(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}u\\ &=m_1\exp(-r_1(t-t_2))N(t_2)+\frac{1}{r_1}\cdot m_1\alpha_2b_2\exp(-\beta_1N_2)[1-\exp(-r_1(t-t_2))]\\ &\to\frac{1}{r_1}\cdot m_1\alpha_2b_2\exp(-\beta_1N_2)\quad(t\to+\infty).\end{aligned}$$

故对 $1>b_2>b_1>0$,存在着 $T>t_2$,使得当 $t\geqslant T$ 时,有 $N(t)>\frac{1}{r_1}\cdot m_1\alpha_2b_1\exp(-\beta_1N_2)\triangleq N_1$. 因此当 $t\geqslant T$ 时,有 $N_1<N(t)<N_2$. 定理 1 证毕.

如果 $r(t)$ 是正的 ω-周期函数,且 r_2 和 r_0 分别是它的上确界和下确界,则式(8)也可写为

$$\exp(-r_2(t-s))\leqslant\exp(-\int_s^t r(\tau)\mathrm{d}\tau)\leqslant\exp(-r_0(t-s))\quad(t\geqslant s). \tag{15}$$

于是从定理 1 的证明及上式我们可知下面推论是成立的.

推论 1　如果 $r(t)$ 是正的 ω-周期函数,且 $N(t)$ 是方程(2)满足初始条件(9)的任意正解,则存在 $T\geqslant t_0$,使得当 $t\geqslant T$ 时,有 $N_1<N(t)<N_2$,其中 $N_2=\alpha_1/r_0+b$, $N_1=\frac{\alpha_2b_1\exp(-\beta_1N_2)}{r_2}$, $0<b,b_1<1$ 为常数.

2 周期解的存在性

定理 2　方程(2)存在着一个正的 ω-周期解 $N_0(t)$ 满足下式,即

$$n_1\leqslant N_0(t)\leqslant n_2, t\in R, \tag{16}$$

其中 $n_2=\alpha_1M_1/r_1$, $n_1=\frac{m_1\alpha_2}{r_1}\exp(-\beta_1n_2)$ 为常数.

证　设 $B=\{V(t)|V: R\to R$ 是连续的 ω-周期函数$\}$,则 B 在范数 $\|V\|=\sup\{|V(t)|: 0\leqslant t\leqslant\omega\}$ 下是一个 Banach 空间. 记 $B_1=\{V|V\in B$ 且 $0\leqslant V(t)\leqslant n_2, t\in R\}$,则 B_1 是 B 中的有界闭子集.

对任意的 $V\in B_1$,我们记

$$V_1(t)=\int_{-\infty}^{t}\exp(-\int_u^t r(\tau)\mathrm{d}\tau)a(u)\int_0^{+\infty}K(s)\exp(-\beta(u)\cdot V(u-s))\mathrm{d}s\mathrm{d}u. \tag{17}$$

显然有 $V_1(t)>0$,且 $V_1(t)<M_1\alpha_1\int_{-\infty}^{t}\exp(-r_1(t-u))\int^{+\infty}K(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}u=M_1\alpha_1/r_1$,即 $V_1(t)$ 是有界的. 显然 $V_1(t)$ 是连续的. 又因为 $V(t)$,$a(t)$,$\beta(t)$,$r(t)$ 都是连续的 ω-周期函数,所以有

$$V_1(t+\omega)=\int_{-\infty}^{t+\omega}\exp(-\int_u^{t+\omega}r(\tau)\mathrm{d}\tau)a(u)\int_0^{+\infty}K(s)\cdot\exp(-\beta(u)V(u-s))\mathrm{d}s\mathrm{d}u$$

$$\underline{\underline{u=x+T}}\int_{-\infty}^{t}\exp(-\int_{x+\omega}^{t+\omega}r(\tau)\mathrm{d}\tau)a(x+T)\int_{0}^{+\infty}K(s)$$
$$\times\exp(-\beta(x+T)V(x+T-s))\mathrm{d}s\mathrm{d}x$$
$$\underline{\underline{\tau=z+\omega}}\int_{-\infty}^{t}\exp(-\int_{x}^{t}r(z+\omega)\mathrm{d}z)a(x)\int_{0}^{+\infty}K(s)$$
$$\times\exp(-\beta(x)V(x-s))\mathrm{d}s\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-\infty}^{t}\exp(-\int_{x}^{t}r(z)\mathrm{d}z)a(x)\int_{0}^{+\infty}K(s)\exp(-\beta(x)V(x-s))\mathrm{d}s\mathrm{d}x$$
$$=V_1(t).$$

由此可知 $V_1\in B_1$.

下面定义算子 $\varphi: B_1\to B_1$ 如下

$$\varphi V(t)=\int_{-\infty}^{t}\exp(-\int_{u}^{t}r(\tau)\mathrm{d}\tau)a(u)\int_{0}^{+\infty}K(s)$$
$$\times\exp(-\beta(u)V(u-s))\mathrm{d}s\mathrm{d}u\quad(\forall\, V\in B_1).\tag{18}$$

下面证明 $\varphi: B_1\to B_1$ 是一个全连续算子.

首先,对任意的 $V_1,V_2\in B_1$,由式(18)可得

$$|\varphi V_1(t)-\varphi V_2(t)|\leqslant\int_{-\infty}^{t}\exp(-\int_{u}^{t}r(\tau)\mathrm{d}\tau)\cdot a(u)\int_{0}^{+\infty}K(s)$$
$$\times|\exp(-\beta(u)V_1(u-s)-\exp(-\beta(u)V_2(u-s))|\mathrm{d}s\mathrm{d}u$$
$$\leqslant M_1\alpha_1\int_{-\infty}^{t}\exp(-r_1(t-u))\int_{0}^{+\infty}K(s)\exp(-\beta(u)y(u-s))$$
$$\times\beta(u)|V_1(u-s)-V_2(u-s)|\mathrm{d}s\mathrm{d}u$$
$$\leqslant M_1\alpha_1\beta_1\|V_1-V_2\|\int_{-\infty}^{t}\exp(-r_1(t-u))\int_{0}^{+\infty}K(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}u$$
$$=M_1\alpha_1\beta_1\|V_1-V_2\|/r_1,\tag{19}$$

其中 $y(t)$ 在 $V_1(t)$ 与 $V_2(t)$ 之间. 所以

$$\|\varphi V_1-\varphi V_2\|\leqslant\frac{M_1\alpha_1\beta_1}{r_1}\|V_1-V_2\|.\tag{20}$$

从而当 $\|V_1-V_2\|\to 0$ 时,有 $\|\varphi V_1-\varphi V_2\|\to 0$. 故 $\varphi: B_1\to B_1$ 是连续的. 设 r_2 是 $r(t)$ 的最大值. 由式(18)的两边直接求导可得

$$\mathrm{d}\varphi V(t)/\mathrm{d}t=-r(t)\varphi V(t)+a(t)\int_{0}^{+\infty}K(s)\exp(-\beta(t)V(t-s))\mathrm{d}s.\tag{21}$$

由于 $V\in B_1$,所以 $\|V\|\leqslant n_2$. 于是由式(21)可得

$$|\mathrm{d}\varphi V(t)/\mathrm{d}t|\leqslant r_2n_2+\alpha_1.\tag{22}$$

从而 φB_1 是等度连续的. 因此,$\varphi: B_1\to B_1$ 是全连续算子. 故由 Schauder 不动点原理,φ 在 B_1 中至少有一个不动点,即有 $N_0\in B_1$,使得 $\varphi N_0(t)=N_0(t)$,此即

$$N_0(t)=\int_{-\infty}^{t}\exp(-\int_{u}^{t}r(\tau)\mathrm{d}\tau)a(u)\int_{0}^{+\infty}K(s)$$
$$\times\exp(-\beta(u)N_0(u-s))\mathrm{d}s\mathrm{d}u,\ t\in R.\tag{23}$$

从上式的右边可知 $N_0(t)>0$,且 $N_0(t)$ 是连续可微的. 直接对上式的两边求导,可知 $N_0(t)$ 满

足方程(2)，即 $N_0(t)$ 是方程(2)的正 ω-周期函数．

由于 $N_0 \in B_1$，故知 $N_0(t) \leqslant n_2(t \in R)$．于是由式(23)可得

$$N_0(t) \geqslant m_1\alpha_2\int_{-\infty}^{t}\exp(-r_1(t-u))\int_0^{+\infty}K(s)\exp(-\beta_1 n_2)\mathrm{d}s\mathrm{d}u$$
$$=\frac{m_1\alpha_2\exp(-\beta_1 n_2)}{r_1} \triangleq n_1. \tag{24}$$

因此，式(16)成立．定理2证毕．

从式(15)及定理2的证明中易知有下面推论．

推论2 如果 $r(t)$ 是正 ω-周期函数，且 r_0 及 r_2 分别是它的下确界和上确界，则方程(2)存在着一个正 ω-周期解 $N_0(t)$ 满足 $n_1 \leqslant N_0(t) \leqslant n_2(t \in R)$，其中 $n_2 = \alpha_1/r_0$，$n_1 = \frac{1}{r_2}\alpha_2\exp(-\beta_1 n_2)$．

由定理2及推论2可知，n_1, n_2 的取法可根据 r_0, r_1, r_2, M_1 及 m_1 的大小来确定，使得方程(2)的正 ω-周期解的存在范围有一个较好的估计．显然，推论2推广了文[2]中的定理3.1.

定理3 如果 $r_1 > M_1\alpha_1\beta_1$，则方程(2)存在着唯一的正 ω-周期解 $N_0(t)$ 满足式(16)．

证 事实上，只须注意到在定理2的证明中，如果取 $B_2 = \{V \mid v \in B$ 且 $V(t) \geqslant 0\}$，并定义算子 $\varphi: B_2 \to B_2$ 如式(18)那样，于是由式(20)可知 $\varphi: B_2 \to B_2$ 是可压缩的．因此，φ 在 B_2 中具有唯一的不动点．由此可知，方程(2)的正 ω-周期解是唯一的，并且式(16)仍然成立．定理3证毕．

参 考 文 献

1 Wazewska-Czyzewska M, Lasota A. Roczniki polkiego towarzystwa mathematycznego. Mathematyka Stosowana, 1976,(5):23～39

2 翁佩萱，梁妙莲．一个造血模型周期解的存在性及其性态．应用数学，1995,8(4):434～439

Existence and Uniqueness of Periodic Solution to a Hematopoiesis Model

Wang Quanyi

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract A study is made on the existence and the uniqueness of periodic solution to a hematopoiesis model. Some new results on the existence and the uniqueness of periodic solution have been obtained.

Keywords integrodifferential equation, infinite time delay, periodic solution, existence, uniqueness