几何分布场合恒加应力寿命试验下的混合数据分析*

吴绍敏　程细玉

（华侨大学管理信息科学系，泉州 362011）

摘要　在恒定应力加速寿命试验下对几何分布的混合数据提出一种可靠性分析方法，并给出正常应力下平均寿命的点估计与置信下限估计．

关键词　混合数据，几何分布，寿命试验

分类号　O 213

1　问题与假定

1.1　问题

由于科学技术的不断进步与发展，产品的寿命愈来愈长．要获得其失效数据，通常采用加速寿命试验方法．恒定应力加速寿命试验就是其一，即选择比正常应力水平 s_0 较高的 m 个应力水平 $s_0<s_1<s_2<\cdots<s_m$，在水平 s_i 下投放 n_i 个样品（$i=\overline{1,m}$）进行试验，其结果见表 1.

表 1　试验数据表

s_i	n_i	r_i	t_{ij}	T_i^*
s_1	n_1	r_1		T_1^*
s_2	n_2	r_2	$t_{21},t_{22},\cdots,t_{2r_2}$	T_2^*
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
s_i	n_i	r_i	$t_{i1},t_{i2},\cdots,t_{ir_i}$	T_i^*
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
s_m	n_m	r_m	$t_{m1},t_{m2},\cdots,t_{mr_m}$	T_m^*

表 1 中既有无失效数据（n_1,T_1^*），又有失效数据 $t_{i1},t_{i2},\cdots,t_{ir_i}$（$i=\overline{2,m}$），称这类试验数据为混合数据．那么对混合数据如何进行可靠性统计分析呢？本文将提出一种分析方法．

1.2　假定

恒加应力试验模型的数据处理方法是基于以下两个假定[1]．

假定 I　在正常应力水平 s_0 与加速应力水平 $s_1,s_2,\cdots,s_m$（$s_0<s_1<s_2<\cdots<s_m$）下产品的寿命服从几何分布，在应力 s_i 下产品寿命分布为 $G(p_i)$[2]，即

$$p(X_i=t)=q_i p_i^{t-1}(t=1,2,\cdots),F_i(t)=1-p_i^{(t)}\quad(i=\overline{0,m}),\tag{1}$$

* 本文 1996-03-08 收到；福建省自然科学基金资助项目

其中 $0<p_i<1, p_i+q_i=1, q_i>0$ 是失效率，$q_i=1-p_i$，$\theta_i=1/q_i$ 是平均寿命($i=\overline{0,m}$).

假定 Ⅱ　产品的平均寿命 θ 与所加应力 s 之间满足下列模型，即

$$\ln\theta = a + b\varphi(s) \text{ 或 } \theta = \exp\{a + b\varphi(s)\}, \tag{2}$$

其中 a,b 是未知参数，$\varphi(s)$是应力 s 的已知函数．当应力 s 是温度时，$\varphi(s)=1/s$，此时式(2)是阿伦尼斯模型；当 s 是电压时，式(2)是逆幂律模型 $\varphi(s)=1/\ln s$.

引理 1　设产品寿命 $X\sim G(q)$，从一批产品中随机抽取 n 只作恒加应力寿命试验．将 n 只样品分为 m 组，每组 n_i 只($i=\overline{1,m}$)，分别放在加速应力水平 s_i 下($i=\overline{1,m}$)作加速寿命试验，试验到 T_i^* 时截止，其结果如表 1. 记 $T_i=\sum\limits_{j=1}^{r_i}(t_{ij}-1)+(n_i-r_i)T_i^*$ 为试验总时间．当定时截尾时，T_i^* 是截尾时间；当定数截尾时，T_i^* 是随机截尾时间．$T_i^*=t_{ir_i}(i=\overline{2,m})$，则 q_i 的似然函数为

$$L(r_i,T_i,q_i) \propto q_i^{r_i}p_i^{T_i} \qquad (i=\overline{2,m}), \tag{3}$$

特别 $L(0,T_1^*,q_1)=p_i^{n_1T_i^*}$，因 $L(r_i,T_i,q_i)=\dfrac{n_i!}{(n_i-r_i)!}q_i^{r_i}p^{T_i}(i=\overline{2,m})$.

2　参数的贝叶斯估计

2.1　$q_i(i=\overline{2,m})$的贝叶斯估计

由引理 1 知 $L(r_i,T_i,q_i)\propto q_i^{r_i}p_i^{T_i}(i=\overline{2,m})$，取 q_i 的无信息验前分布 $q_i^{-1}(1-q_i)^{-1}$[3]，可得 q_i 的后验密度函数为

$$f(q_i|r_i,T_i)=\frac{q_i^{r_i-1}(1-q_i)^{T_i-1}}{\int_0^1 q_i^{r_i-1}(1-q_i)^{T_i-1}\mathrm{d}q_i}$$

$$=\frac{1}{B(r_i,T_i)}q_i^{r_i-1}(1-q_i)^{T_i-1} \quad (0<q_i<1), \tag{4}$$

在二次损失下 q_i 的贝叶斯估计为 $\hat{q}_i=E(q_i|r_i,T_i)=\dfrac{1}{B(r_i,T_i)}\int_0^1 q_i^{r_i}(1-q_i)^{T_i-1}\mathrm{d}q_i=\dfrac{B(r_i+1,T_i)}{B(r_i,T_i)}=\dfrac{r_i}{T_i+r_i}=\dfrac{r_i}{\tau_i}$，其中 $\tau_i=\sum\limits_{j=1}^{r_i}t_{ij}+(n_i-r_i)T_i^*$，因此，平均寿命 θ_i 的估计为 $\theta_i=\tau_i/r_i$ $(i=\overline{2,m})$.

2.2　q_1 的点估计

因 $L(0,T_i^*,q_1)=p_1^{n_1T_i^*}$，用最大似然估计 $q_1=1$，用贝叶斯估计 $q_1=0$ 无意义．故必须特殊处理．记在 s_1 水平下，产品的寿命为 X_1，$R_1=p(X_1>T_1^*)$. 已知 n_1 只样品在 s_1 水平下试验到 T_1^* 时均未失效，则其不失效的概率为 $L(R_1,n_1)=R_1^{n_1}$，其中 R_1 为待估参数，n_1 为不失效的个数，是非 $r.v.$，但可视为 $r.v.$ 的特例，故 $L(R_1,n_1)$可看作 n_1 的似然函数．应用贝叶斯假设可视 R_1 为 $r.v.$ 取 R_1 的分布密度函数为 $\pi(R_1)=U(0,1)$，则 $L(R_1,n_1)$就是(R_1,n_1)的联合似然函数．根据贝叶斯定理可得如下定理．

定理 1　R_1 的后验密度为

$$f(R_1|n_1)=(n_1+1)R_1^{n_1} \qquad (0<R_1<1), \tag{5}$$

在二次损失下 R_1 的贝叶斯估计为 $\hat{R}_1=(n_1+1)/(n_1+2)$.

证　因 $L(R_1,n_1)=R_1^{n_1}$，则

$$f(R_1|n_1)=\frac{L(R_1,n_1)\pi(R_1)}{\int_0^1 L(R_1,n_1)\pi(R_1)\mathrm{d}R_1}=\frac{R_1^{n_1}}{\int_0^1 R_1^{n_1}\mathrm{d}R_1}$$

$$=(n_1+1)R_1^{n_1}\quad(0<R_1<1).$$

$$\hat{R}_1=E(R_1|n_1)=\int_0^1 R_1 f(R_1|n_1)\mathrm{d}R_1$$

$$=\int_0^1(n_1+1)R_1^{n_1}\mathrm{d}R_1=(n_1+1)/(n_1+2).$$

推论 1 $\hat{q}_1=1-\frac{(n_1+1)}{(n_1+2)}^{1/[T_1^*]}$ 及 $\hat{\theta}_1=1/[1-(\frac{n_1+1}{n_1+2})^{1/[T_1^*]}]$.

证 因 $R_1=P_1^{[T_1^*]}$, $\hat{R}_1=\hat{P}_1^{[T_1^*]}$, 即 $\frac{(n_1+1)}{(n_1+2)}=\hat{P}_1^{[T_1^*]}$, $\hat{P}_1=(\frac{n_1+1}{n_1+2})^{1/[T_1^*]}$, 从而

$$\hat{q}_1=1-(\frac{n_1+1}{n_1+2})^{1/[T_1^*]},\hat{\theta}_1=\frac{1}{1-(\frac{n_1+1}{n_1+2})^{1/[T_1^*]}}.$$

2.3 $q_i(i=\overline{2,m})$的置信上限估计

对给定的置信水平 $\alpha(0<\alpha<1)$, 有 $P(q\leqslant q_u|r.T)=1-\alpha$, 其中 q_u 是置信上限. 由式(4)及 $\frac{1}{B(r.T)}\int_0^{q_u}x^{r-1}(1-x)^{T-1}\mathrm{d}x=1-\alpha$, 并记 $S(q_u)=\frac{1}{B(r.T)}\int_0^{q_u}x^{r-1}(1-x)^{T-1}\mathrm{d}x$, 令 $x=f_1y/f_2+f_1y$, $f_1=2r$, $f_2=2T=2(\tau-r)$, $f_1/2=r$, $f_2/2=(\tau-r)$, $\mathrm{d}x=f_1f_2\mathrm{d}y/(f_2+f_1y)^2$. 则

$$S(q_u)=\frac{\Gamma(\frac{f_1+f_2}{2})}{\Gamma(\frac{f_1}{2})\Gamma(\frac{f_2}{2})}\int_0^{f_2q_u/f_1(1-q_u)}(\frac{f_1y}{f_2+f_1y})^{r-1}(1-\frac{f_1y}{f_2+f_1y})^{T-1}\frac{f_1f_2}{(f_2+f_1y)^2})\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{f_2q_u/f_1(1-q_u)}f(y,f_1,f_2)\mathrm{d}y=1-\alpha,$$

其中

$$f(y,f_1,f_2)=\frac{\Gamma(\frac{f_1+f_2}{2})}{P(\frac{f_1}{2})\Gamma(\frac{f_2}{2})}f_1^{f_1/2}\cdot f_2^{f_2/2}(f_2+f_1y)^{-(f_1+f_2)/2}\cdot y^{\frac{f_1}{2}-1}\quad(y>0),$$

这是第一自由度为 f_1, 第二自由度为 f_2 的 F-分布密度函数. 由此可知, $F_\alpha(f_1,f_2)=f_2q_u/f_1(1-q_u)$, 从而解得 $\hat{q}_u=1/1+\frac{f_2}{f_1F_\alpha(f_1f_2)}$, 即得 q_i 的 $(1-\alpha)$ 贝叶斯置信上限为

$$\hat{q}_{iu}=1/(1+\frac{f_2}{f_1F_\alpha(f_1f_2)}).$$

平均寿命 θ_i 的 $(1-\alpha)$ 贝叶斯置信上限为

$$\hat{\theta}_{iL}=1+f_2/f_1F_\alpha(f_1f_2)$$

$$=1+(\tau_i-r_i)/r_iF_\alpha(2r_i,2(\tau_i-r_i))\quad(i=\overline{2,m}).\tag{6}$$

2.4 q_1 的置信上限及 θ_1 的置信上限估计

因 $R_1\sim f(R_1|n_1)=(n_1+1)R_1^{n_1}(0<R_1<1)$, 则有 $P(R_1>R_{1L})=\int_{R_{1L}}^1(n_1+1)R_1^{n_1}\mathrm{d}R_1=R_1^{n_1+1}|_{R_{1L}}^1=1-R_{1L}^{n_1+1}=1-\alpha$, 因而可得 $\hat{R}_{1L}=\alpha^{1/n_1+1}$. 又因 $R_1=P(X>T_1^*)=p_1^{[T_1^*]}$; $R_{1L}=P_{1L}^{[T_1^*]}=$

$(1-q_u)^{[T_1^*]}$，即 $\alpha^{1/n_1+1}=(1-\hat{q}_{1u})^{[T_1^*]}$．因此，解得

$$\hat{q}_{1u}=1-\alpha^{1/(n_1+1)[T_1^*]},\ \theta_{1L}=\frac{1}{1-\alpha^{1/(n_1+1)[T_1^*]}}. \tag{7}$$

3 正常应力下的参数估计

3.1 q_0 与 θ_0 的点估计

由 $\hat{\theta}_1=\dfrac{1}{1-(\frac{n_1+1}{n_1+2})^{1/[T_1^*]}}$ 和 $\hat{\theta}_i=\tau_i/r_i(i=\overline{2,m})$，$\varphi_i=\varphi(s_i)$ $(i=\overline{1,m})$ 以及假定 I，应用数据组 $(\varphi_i,\ln\hat{\theta}_i)$ $(i=\overline{1,m})$，按最小二乘法可建立如下回归方程，即

$$\left.\begin{aligned}&\ln\theta=\hat{a}+\hat{b}\varphi(s)\ \text{或}\ \theta=\exp\{\hat{a}+\hat{b}\varphi(s)\},\\&\hat{a}=\overline{\ln\theta}-\hat{b}\bar{\varphi},\hat{b}=[\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\ln\hat{\theta}_i-m\bar{\varphi}\overline{\ln\theta}]/\sum_{i=1}^{m}(\varphi_i-\bar{\varphi})^2,\\&\bar{\varphi}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\varphi_i,\qquad\overline{\ln\theta}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\ln\hat{\theta}_i,\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

由式(8)可求得 $\ln\hat{\theta}_0=\hat{a}+\hat{b}\varphi(s_0)$，$\hat{\theta}_0=\exp\{\hat{a}+\hat{b}\varphi(s_0)\}$ 或 $\hat{q}_0=1/\hat{\theta}_0$．

3.2 q_0 的置信上限与 θ_0 的置信下限估计

对给定的置信水平 $\alpha(0<\alpha<1)$，由式(6)，(7)可得 $\hat{\theta}_{1L}=\dfrac{1}{1-\alpha^{1/(n_1+1)[T_1^*]}}$ 及 $\hat{\theta}_{iL}=1+(\tau_i-r_i)/r_iF_\alpha(2r_i,2(\tau_i-r_i))$，$i=\overline{2,m}$．应用数据组 $(\varphi_i,\ln\hat{\theta}_{iL})(i=\overline{1,m})$，同样可建立回归方程 $\ln\hat{\theta}_L=\hat{a}+\hat{b}\varphi(s)$，$\ln\hat{\theta}_{0L}=\hat{a}+\hat{b}\varphi(s_0)$，$\hat{\theta}_{0L}=\exp\{\hat{a}+\hat{b}\varphi(s_0)\}$ 或 $\hat{q}_{0u}=1/\hat{\theta}_{0L}$，即有 $(1-\alpha)$ 的把握断定 $q_0<\hat{q}_{0u}$ 或 $\theta_{0L}>\hat{\theta}_{0L}$．

4 举例

某种电器开关，其寿命服从几何分布，取 4 个加速温度水平 $s_1=463$ K，$s_2=493$ K，$s_3=513$ K，$s_4=533$ K．加速模型为阿伦尼斯模型 $\varphi(s)=1/k_0s$，$k_0=0.861\,7\times10^{-4}$ K，算得 $\varphi_1=25.064\,7$，$\varphi_2=23.559\,5$，$\varphi_3=22.621\,8$，$\varphi_4=21.772\,9$．作定数截尾试验，正常应力水平 $s_0=443$ K，试验结果如表 2．(1) 试估计正常应力水平下开关失效率与平均寿命；(2)给定置信水平 $\alpha=0.05$ 试求其失效率的置信上限及其平均寿命的置信下限．

表 2　试验数据表(单位：次数)

s_i/K	n_i	r_i	t_{ij}	T_i^*
$s_1=463$	$n_1=10$	$r_1=0$		$T_1^*=1000$
$s_2=493$	$n_2=10$	$r_2=4$	410,520,611,730	$T_2^*=730$
$s_3=513$	$n_3=10$	$r_3=4$	361,421,530,610	$T_3^*=610$
$s_4=533$	$n_4=10$	$r_4=4$	161,231,371,383	$T_4^*=383$

4.1 求 q_0 与 θ_0 的估计

应用 $\hat{\theta}_1=\dfrac{1}{1-(\frac{n_1+1}{n_1+2})^{1/[T_1^*]}}$ 及 $\hat{\theta}_i=\dfrac{\tau_i}{r_i}(i=\overline{2,4})$，算得 $\ln\hat{\theta}_1=9.349\,5$；$\ln\hat{\theta}_2=7.416\,2$；$\ln\hat{\theta}_3=7.241\,0$；$\ln\hat{\theta}_4=6.353\,5$．这些与 $\varphi_i(i=\overline{1,4})$ 可算得回归方程为 $\ln\hat{\theta}=-12.643\,9+0.870\,1\varphi(s)$，

相关系数 $r_{0\theta}=0.972\ 3$，方程可靠．将 $\varphi_0=\varphi(s_0)=26.196\ 3$，代入方程，可得 $\ln\hat{\theta}_0=10.149\ 5$，$\hat{\theta}_0=2\ 557\ 8$，$\hat{q}_0=3.909\ 6\times10^{-5}$.

4.2 求 q_{0u} 与 θ_{0L} 的估计

应用 $\hat{\theta}_{1L}=\frac{1}{1-\alpha^{1/(n_1+1)[T_1^*]}}$ 和 $\hat{\theta}_{iL}=1+(\tau_i-r_i)/r_iF_\alpha(2r_i,2(\tau_i-r_i))(i=\overline{2,4})$，计算得 $\ln\hat{\theta}_{1L}=8.208\ 6$；$\ln\hat{\theta}_{2L}=6.752\ 9$；$\ln\hat{\theta}_{3L}=6.577\ 0$；$\ln\hat{\theta}_{4L}=6.094\ 2$. 这些与 $\varphi_i(i=\overline{1,4})$ 可建立回归方程即 $\ln\hat{\theta}_L=-7.813\ 9+0.633\ 1\varphi(s)$. 相关系数 $r_{\varphi\theta_L}=0.981\ 6$，方程可靠，将 $\varphi_0=26.196$ 代入方程得 $\ln\hat{\theta}_{0L}=8.771\ 0$，$\hat{\theta}_{0L}=6\ 444$，$\hat{q}_{0u}=1.551\ 8\times10^{-4}$. 可以预测 $\theta_0>6\ 444$，$q_0<1.551\ 8\times10^{-4}$.

参 考 文 献

1 茆诗松，王玲玲．可靠性统计．上海：华东师范大学出版社，1984．3～27

2 方开泰，许建伦．统计分布．北京：科学出版社，1987．9～105

3 Zhang Y T, Tao Qiwei. Some maximal information and generalized maximal entropy priors. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 1991,(2):129～221

Analysis of Mixed Data Distributed Geometrically under Constant Accelerated Stress Life Test

Wu Shaomin Chang Xiyu

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011,Quanzhou)

Abstract A reliable analytical method is given to the mixed data distributed geometrically under constant accelerated stress life test. The point estimate of average life and the estimate of fiducial lower limit under normal stress are also given.

Keywords mixed data, geometrical distribution, life test