

p -循环矩阵与 AOR 迭代法*

曾文平

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

摘要 推导出 AOR 迭代矩阵 $\mathcal{L}_{r,w}$ 的非零特征值 λ , 以及其相伴的块 Jacobi 矩阵特征值 μ 在 p -循环矩阵情况下的新的函数方程.

关键词 迭代法, 循环矩阵, 函数方程

分类号 O 246.1

用迭代法求解线性方程组

$$AX = b \quad (1)$$

时, 若将矩阵 $A \in C^{n \times n}$ 分解成分块形式 $[A_{i,j}]_{p \times p}$, 其中假设 $A_{i,i} (1 \leq i \leq p, p \geq 2)$ 均为非奇异方阵, 且记 $D = \text{diag}(A_{1,1}, A_{2,2}, \dots, A_{p,p})$, 则其相伴的块 Jacobi 矩阵为

$$B = I - D^{-1}A = [B_{i,j}]_{p \times p} \\ = \begin{bmatrix} 0 & B_{1,2} & \cdots & B_{1,p} \\ B_{2,1} & 0 & \cdots & B_{2,p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ B_{p,1} & B_{p,2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

解线性方程组(1)的 AOR 迭代矩阵为^[1]

$$\mathcal{L}_{r,w} = (I - rI)^{-1}[(1-w)I + (w-r)I + wu], \quad (3)$$

其中 l, u 分别为 B 的严格下、上三角块矩阵. 当 $r=w$ 时, 它退化为 SOR 迭代矩阵.

人们往往感兴趣当矩阵 B 是 p -弱循环阵时, 各种迭代矩阵的特征值与 Jacobi 迭代矩阵特征值之间的关系. 如文[2]给出了当 A 为相容有序的 p -循环阵时, SOR 迭代阵与 Jacobi 迭代矩阵特征值之间的函数关系式为

$$(\lambda + w - 1)^p = \lambda^{p-1} w^p \mu^p. \quad (4)$$

但我们注意到该函数关系式并不包含文[2]中节 4.2 练习(1)所给出的函数关系式, 即

$$(\lambda + w - 1)^p = \lambda w^p \mu^p. \quad (5)$$

本文将利用文[3]所给出的行列式不变性, 导出 AOR 矩阵特征值与 Jacobi 迭代矩阵特征值之间的新的函数关系式. 在 SOR 矩阵情况下, 它包含关系式(4)与(5). 显然地, 这时 AOR

* 本文 1996-03-05 收到

迭代松弛因子的选取将起极其重要的作用. 错误的函数关系将导致错误的结论.

1 基本结果

沿用文[3]中的记号, 定义循环排列 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$ 及其相伴的子集

$$\begin{aligned}\xi_l &= \{\sigma_j : \sigma_j > \sigma_{j+1}\}, \\ \xi_u &= \{\sigma_j : \sigma_j < \sigma_{j+1}\},\end{aligned}\quad (6)$$

其中 σ_j 为 Jacobi 阵 B 的非零块 $B_{\sigma_j, \sigma_{j+1}} \neq 0 (1 \leq j \leq p)$ 的下标. 用 $|R|$ 表示任意集合 R 的元素个数, 则 $|\xi_l|$ 和 $|\xi_u|$ 恰好分别表示矩阵 B 中下、上三角块中的非零子块矩阵的个数, 而且 $\xi_l \cup \xi_u = \{1, 2, \dots, p\}$, $\xi_l \cap \xi_u = \Phi$ (空集), 则 $\xi_l + \xi_u = p$.

定义不相交子集 η_l 和 η_u 如下

$$\begin{aligned}\eta_l &= \{\sigma_j : \sigma_{j-1} > \sigma_j, \sigma_{j+1} > \sigma_j \text{ 且 } \sigma_{j-1} > \sigma_{j+1}\}, \\ \eta_u &= \{\sigma_j : \sigma_{j-1} > \sigma_j, \sigma_{j+1} > \sigma_j \text{ 且 } \sigma_{j-1} < \sigma_{j+1}\},\end{aligned}\quad (7)$$

其中 $\sigma_0 = \sigma_p$, 则 $|\eta_l|$ 和 $|\eta_u|$ 恰好分别是出现在乘积矩阵中严格下、上三角块矩阵中非零块的个数, 且定义

$$k = \begin{cases} |\eta_l| + |\eta_u| & (p > 2), \\ 1 & (p = 2), \end{cases} \quad (8)$$

则 k 满足关系式 $1 \leq k \leq [p/2]$, 其中 $[x]$ 表示数 x 的整数部分. 定理 1 的证明基于如下行列式不变性引理 1.

引理 1^[3] 设 $B = l + u$ 为由循环排列 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$ 所形成的指标 p 的弱循环矩阵, 则对任意复常数 α, β, ν 和 δ 有 $\det\{\nu I - \alpha l - \beta u - \delta lu\} = \det\{\nu I - [\alpha^{|\xi_l| - k} \beta^{|\xi_u| - k} (\alpha\beta + r\delta)^k]^{1/p} B\}$, 其中 $|\xi_l|, |\xi_u|$ 及 k 如前所定义.

定理 1 假定分块矩阵 A 中所有对角子块矩阵 $A_{i,i} (1 \leq i \leq p, p \geq 2)$ 为非奇异方阵, 并假定形如式(2)的矩阵 B 为由循环排列 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$ 所形成的块 Jacobi 迭代矩阵. 若 $w \neq 0$ 且 $\lambda r + w - r \neq 0$, 且式(3)的 AOR 迭代矩阵 $\mathcal{L}_{r,w}$ 的特征值 $\lambda \neq 0$, 且 μ 满足下列函数关系式

$$(\lambda + w - 1)^p = (\lambda r + w - r)^{|\xi_l|} w^{|\xi_u|} \mu^p, \quad (9)$$

其中 $|\xi_l|, |\xi_u|$ 及 k 如前所定义, 且规定在式(9)中 $0^0 = 1$, 则 μ 为 B 的特征值; 反之, 若 μ 是 B 的特征值, 且 λ 满足式(9), 则 λ 是 $\mathcal{L}_{r,w}$ 的特征值.

证明 $\mathcal{L}_{r,w}$ 的特征值 λ 就是它的特征方程 $\det\{\lambda I - \mathcal{L}_{r,w}\} = 0$ 的根. 但 $I - rl$ 非奇异且 $\det(I - rl) = 1$, 所以

$$\begin{aligned}\det\{\lambda I - \mathcal{L}_{r,w}\} &= \det\{\lambda I - (I - rl)^{-1}[(1 - w)I + (w - r)I + wu]\} \\ &= \det(I - rl)^{-1} \det\{\lambda(I - rl) - [(1 - w)I + (w - r)I + wu]\} \\ &= \det\{(\lambda + w - 1)I - (\lambda r + w - r)I - wu\}.\end{aligned}\quad (10)$$

若令 $\Phi(\lambda) = \det\{(\lambda + w - 1)I - (\lambda r + w - r)I - wu\}$, 则由引理 1 知

$$\Phi(\lambda) = \det\{\nu I - [\alpha^{|\xi_l| - k} \beta^{|\xi_u| - k} (\alpha\beta + r\delta)^k]^{1/p} B\}, \quad (11)$$

其中 $\nu = \lambda + w - r, \alpha = \lambda r + w - r, \beta = w, \delta = 0$. 因此, 若 λ 是 $\mathcal{L}_{r,w}$ 的特征值, 当且仅当 $\Phi(\lambda) = 0$, 即

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda) &= \det\{\nu I - [\alpha^{|\xi_l| - k} \beta^{|\xi_u| - k} (\alpha\beta + r\delta)^k]^{1/p} B\}, \\ \det\{(\lambda + w - 1)I - (\lambda r + w - r)I - wu\} &= 0.\end{aligned}\quad (12)$$

因为 B 是 p -弱循环阵, 从而 $(\lambda r + w - r)^{|\xi_l|} w^{|\xi_u|} B$ 也是 p -弱循环阵, 则由文[2]的 Romanovsky 定理得

$$\Phi(\lambda) = (\lambda + w - 1)^m \prod_{i=1}^v \{(\lambda + w - 1)^p - (\lambda r + w - r)^{|\xi_l|} w^{|\xi_u|} \mu_i^p\}, \quad (13)$$

其中 μ_i 在 $v' \geq 1$ 时是 B 的非零特征值, 而 m 是非负整数. 后面仿照文[2]定理 4.3 的证明便可完成本定理的证明, 这里从略. 作为特例, 我们有

推论 1 设分块矩阵 A 为相容次序的 p -循环阵, 其对角线上子矩阵 $A_{i,i} (1 \leq i \leq p, p \geq 2)$ 非奇异. 若 $w \neq 0$, 则 λ 为 AOR 迭代矩阵 $\mathcal{L}_{r,w}$ 的特征值, 且 $\lambda \neq 0, \lambda r + w - r \neq 0$, 而 μ 满足

$$(\lambda + w - 1)^p = (\lambda r + w - r)^{p-1} w \mu^p, \quad (14)$$

则 μ 是块 Jacobi 迭代矩阵 $B = I + u$ 的特征值. 反之, 若 μ 是 B 的特征值, 且 λ 满足式(14), $\lambda r + w - r \neq 0$, 则 λ 是 $\mathcal{L}_{r,w}$ 的特征值(证明见节 3 例 1).

事实上, 如果注意到: AOR 迭代可看作 SOR 方法的外推, 则 $\mathcal{L}_{r,w}$ 的特征值 λ 与 $\mathcal{L}_{r,r}$ 的特征值 ψ 之间有关系式 $\lambda = s\psi + (1-s) (s = w/r, r \neq 0)$, 由此解出 $\psi = (\lambda + s - 1)/s (w \neq 0)$. 将它代入文[2]中定理 4.3 的函数关系式(注意此时 $w = r, \lambda = \psi$), 可得 $[(\lambda + s - 1)/s + r - 1]^p = [(\lambda + s - 1)/s]^{p-1} r^p \mu^p$, 整理即得式(14).

特别地, 当 $p = 2$ 时, 即得文[1]中定理 1 的函数方程式(5.3), 即 $(\lambda + w - 1)^2 = (\lambda r + w - r) w \mu^p$.

推论 2 在定理 1 的条件下, 对 SOR 迭代矩阵 \mathcal{L}_w 的特征值 λ 与 Jacobi 迭代矩阵特征值 μ 之间满足函数关系式, 即

$$(\lambda + w - 1)^p = \lambda^{|\xi_l|} w^p \mu^p, \quad (15)$$

特别地, 在推论 1 的条件下, 对 SOR 迭代有如下函数关系式

$$(\lambda + w - 1)^p = \lambda^{p-1} w^p \mu^p. \quad (16)$$

式(15)是 SOR 迭代与 Jacobi 迭代矩阵特征值之间的一个新的和应用范围更广的函数关系式, 即推论 2 推广了文[2]中的定理 4.3.

2 应用举例

例 1 考虑由循环排列 $\sigma = \{1, p, p-1, \dots, 2\}$ 所形成的 p -弱循环阵

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & & & & B_{1,p} \\ B_{2,1} & 0 & & & \\ & B_{3,2} & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & B_{p,p-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (p \geq 2), \quad (17)$$

此时 $\xi_l = \{2, 3, \dots, p\}$ 且 $|\xi_l| = p-1; \xi_u = \{1\}$ 且 $|\xi_u| = 1$. 当 $p > 2$ 时, $\eta_l = \emptyset$ 且 $|\eta_l| = 0; \eta_u = \{1\}$ 且 $|\eta_u| = 1; k = 1$. 当 $p = 2$ 时, $\eta_l = \emptyset$ 且 $|\eta_l| = 0; \eta_u = \emptyset$ 且 $|\eta_u| = 1; k = 1$. 则定理 1 中的函数关系式(9)成为

$$(\lambda + w - 1)^p = (\lambda r + w - r)^{p-1} w \mu^p, \quad (18)$$

特别地, 当 $r = w$ 时, 该式为 $(\lambda + w - 1)^p = \lambda^{p-1} w^p \mu^p$. 这就是推论 1 与 2 的结论式(14), (16). 注意到此时相应的系数矩阵 A 也是相容次序的 p -循环阵, 满足推论 1 的条件. 所以, 推论 1

可看作本文定理的一个特例.

值得指出的是,例 1 中的特殊弱循环阵 B ,也可仿照文[4]中方法直接导出与式(14)一样的函数关系式(14),但文[5]中因 $M_{r,w}$ 有错,所以导致所建立的函数关系式不正确.事实上,直接验证可知,例 3 中,当 $p=3$ 时, $M_{r,w}$ 的正确表达式应为

$$M_{r,w} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & wB_{13} \\ w(1-r)B_{2,1} & 0 & rwB_{21}B_{13} \\ rw(1-r)B_{32}B_{21} & w(1-r)B_{32} & r^2wB_{32}B_{21}B_{13} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

例 2 考虑由循环排列 $\sigma = \{1, 2, \dots, p\}$ 所形成的 $p-1$ 弱循环阵为

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & B_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & B_{2,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & B_{p-1,p} \\ B_{p,1} & 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}, \quad p \geq 2, \quad (20)$$

此时 $\xi_l = \{p\}$ 且 $|\xi_l| = 1$; $\xi_u = \{1, 2, \dots, p-1\}$ 且 $|\xi_u| = p-1$. 当 $p > 2$ 时, $\eta_l = \{1\}$ 且 $|\eta_l| = 1$; $\eta_u = \emptyset$ 且 $|\eta_u| = 0$; $k=1$. 当 $p=2$ 时, $\eta_l = \emptyset$ 且 $|\eta_l| = 0$; $\eta_u = \emptyset$ 且 $|\eta_u| = 0$; $k=1$. 则定理 1 中的函数关系式(9)变成

$$(\lambda + w - 1)^p = (\lambda r + w - r)w^{p-1}\mu^p, \quad (21)$$

当 $r=w$ 时,则得

$$(\lambda + w - 1)^p = \lambda w^p \mu^p, \quad (22)$$

上式与文[2]中节 4.2 的练习①的结论相一致.

须注意的是,在前两例中,尽管 B 都是 p -弱循环阵,但由于具体位置不同, l 与 u 中非零子块的个数各不相同,从而导致了函数关系式(21)与(18)(相应地式(22)与 $(\lambda + w - 1)^{p-1} = \lambda w^{p-1} \mu^{p-1}$)互不相同.

例 3 考虑由循环排列 $\sigma = \{1, 2, 3, 4\}$ 形成的 4-弱循环阵为

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{2,4} \\ 0 & B_{3,2} & 0 & 0 \\ B_{4,1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

此时 $\xi_l = \{3, 4\}$ 且 $|\xi_l| = 2$; $\xi_u = \{1, 2\}$ 且 $|\xi_u| = 2$; $\eta_l = \{1\}$ 且 $|\eta_l| = 1$; $\eta_u = \{2\}$ 且 $|\eta_u| = 2$; $k=2$. 则定理 1 中的函数关系式(9)变成

$$(\lambda + w - 1)^4 = (\lambda r + w - r)^2 w^2 \mu^4. \quad (24)$$

由实际计算也可验证这个结论是正确的.事实上,因为 $\det(\mu I - B) = \mu^4 - \det(B_{13}B_{32}B_{24}B_{41}) = 0$, 所以, $\det(B_{13}B_{32}B_{24}B_{41}) = \mu^4$. 而 $\det(\lambda I - \mathcal{L}_{r,w}) = \det\{(\lambda + w - 1)I - (\lambda - 1)rl - wB\} = (\lambda + w - 1)^4 - (\lambda r + w - r)^2 w^2 \det(B_{13}B_{32}B_{24}B_{41}) = 0$. 所以, $(\lambda + w - 1)^4 - (\lambda r + w - r)^2 w^2 \mu^4$, 即式(24)成立.

例 4 考虑由循环排列 $\sigma = \{1, 2, 3, 4\}$ 形成的 4-弱循环阵为

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & B_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{2,4} \\ B_{3,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{4,3} & 0 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

此时 $\xi_l = \{3, 4\}$ 且 $|\xi_l| = 2$; $\xi_u = \{1, 2\}$ 且 $|\xi_u| = 2$; $\eta_l = \{1\}$ 且 $|\eta_l| = 1$; $\eta_u = \emptyset$ 且 $|\eta_u| = 0$; $k = 1$. 则定理 1 中的函数关系式(9)变成

$$(\lambda + w - 1)^4 = (\lambda r + w - r)^2 w^2 \mu^4, \quad (26)$$

实际计算也可验证其正确性.

要注意的是,在后两例中,虽然 B 的具体形式不同,而函数关系式(26)与(24)却相同. 这是由于 B 都是 4-弱循环阵, $p=4$; 又因 l 和 u 均有二个子块为零,而函数关系式(9)中仅与 $|\xi_l|$ 及 $|\xi_u|$ 有关,而与 k 无关(即与非零子块位置无关,只要它是 p -弱循环阵即可)的缘故.

本文为校科研基金资助项目.

参 考 文 献

- 1 Hadjidimos A. Accelerated overrelaxation method. Math. Comp., 1978, 32(141):149~157
- 2 Varga R S. Matrix iterative analysis. New York: Prentice Hall, 1962. 91~122
- 3 Li X Z, Varga R S. A note the ssor and ussor iterative methods applied to p -cyclic-matrices. Numer Math., 1989, 56:109~121
- 4 Varga R S, Niethammer W, Cai D Y. p -cyclic matrices and ssor method. LAA, 1984, 58:425~439
- 5 沈光星. 循环矩阵和 AOR 方法的敛散区域. 应用数学和计算数学学报, 1989, 3(2):30~39

p -Cyclic Matrix and AOR Iterative Method

Zeng Wenping

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract Under the circumstance of p -cyclic matrix, a new functional equation is derived for coupling the nonzero eigenvalue λ of AOR iterative matrices $\mathcal{L}_{r,w}$, with the associated block Jacobi matrix μ .

Keywords iterative method, cyclic matrix, functional equation