

各向异性介质中的静电场强度与高斯定理*

苏武浔 魏腾雄 陈荣年

(华侨大学电子工程系, 泉州 362011)

摘要 利用各向异性静电势的普遍公式, 给出在线性各向异性介质中的静电场强度的普遍公式和高斯定理, 可求出在上述介质中若干种电荷分布的静电场, 充实各向异性静电场的一个基本内容.

关键词 电介质, 各向异性, 静电场强度, 高斯定理

分类号 O 441.1

本文在文[1~5]基础上, 对各向异性静电场的一个基本问题: 静电场强度普遍公式和高斯定理进行了研究, 给出它们的普遍形式及其应用, 使对各向异性静电场的认识深入一步.

1 各向异性介质中静电场强度的普遍公式

文[5]给出在各向异性介质中, 当介电常数张量 $\epsilon\epsilon$ 在其三个主轴与坐标轴 x_1, x_2, x_3 重合时, 静电势的普遍公式为

$$\varphi(X) = \frac{1}{4\pi \sqrt{\epsilon_{11}\epsilon_{22}\epsilon_{33}}} \int \frac{\rho(X') dv'}{(R_1^2/\epsilon_{11} + R_2^2/\epsilon_{22} + R_3^2/\epsilon_{33})^{1/2}}, \quad (1)$$

式中 $R = x - x'$. 如引入算符 $\nabla = e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$, 则由式(1)得静电场强度为

$$E(X) = -\nabla \varphi(X) = \frac{1}{4\pi \sqrt{\epsilon_{11}\epsilon_{22}\epsilon_{33}}} \int \frac{R_1 e_1/\epsilon_{11} + R_2 e_2/\epsilon_{22} + R_3 e_3/\epsilon_{33}}{(R_1^2/\epsilon_{11} + R_2^2/\epsilon_{22} + R_3^2/\epsilon_{33})^{3/2}} \rho(X') dv', \quad (2)$$

它是静电场强度在坐标系 x_1, x_2, x_3 中的形式. 由下面坐标变换得 $\xi_i = x_i/\sqrt{\epsilon_{ii}}$ ($i=1, 2, 3$), 还可以得到在各向异性坐标系 ξ_1, ξ_2, ξ_3 中的另一种形式. 为此, 再引入一个并矢: $\epsilon'\epsilon' = e_1 e_1/\sqrt{\epsilon_{11}} + e_2 e_2/\sqrt{\epsilon_{22}} + e_3 e_3/\sqrt{\epsilon_{33}}$, 则有 $\xi = e_1 x_1/\sqrt{\epsilon_{11}} + e_2 x_2/\sqrt{\epsilon_{22}} + e_3 x_3/\sqrt{\epsilon_{33}} = \epsilon'\epsilon' \cdot x$, 若它有唯一解, 则 $x = \epsilon'\epsilon'^{(-1)} \cdot \xi$, 式中 $\epsilon'\epsilon'^{(-1)}$ 是 $\epsilon'\epsilon'$ 的逆并矢. 利用上式, 则式(2)可表为

$$E(\epsilon'\epsilon'^{(-1)} \cdot \xi) = \frac{1}{4\pi \epsilon'\epsilon'} \cdot \int \frac{y}{y^3} \rho(\epsilon'\epsilon'^{(-1)} \cdot \xi') d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi'_3, \quad (3)$$

式中 $y = \xi - \xi'$. 如简单一点表示 E 和 ρ 中的自变量, 则 $E(\xi) = \frac{1}{4\pi \epsilon'\epsilon'} \cdot \int \frac{y}{y^3} \rho(\xi') d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi'_3$, 此形式与介质为各向同性时的电场强度的普遍公式 $E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{r}{r^3} \rho(x') dv'$ 比较, 除坐标系由 x_1, x_2, x_3 变换为坐标系 ξ_1, ξ_2, ξ_3 以及 $\frac{1}{\epsilon}$ 被 $\epsilon'\epsilon'$ 替代外, 它都一样.

* 本文 1996-03-22 收到; 福建省自然科学基金资助项目

2 各向异性介质中的高斯定理

当介质为各向异性时,介质的电磁性质方程是 $D_i = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ik} E_k (i=1,2,3)$,也可表为 $D = \epsilon \epsilon \cdot E$ 代入麦克斯韦方程组的一个方程 $\nabla \cdot D = \rho$ 中,便是各向异性介质中的高斯定理 $\nabla \cdot (\epsilon \epsilon \cdot E) = \rho$. 它的积分形式是 $\oint (\epsilon \epsilon \cdot E) \cdot ds = \int \rho dv$.

3 举例

例 1 求点电荷 q 的电场强度

取 q 位于坐标系 x_1, x_2, x_3 的原点,由式(2)得

$$E(x) = \frac{q}{4\pi \sqrt{\epsilon_{11}\epsilon_{22}\epsilon_{33}}} \frac{x_1 e_1 / \epsilon_{11} + x_2 e_2 / \epsilon_{22} + x_3 e_3 / \epsilon_{33}}{(x_1^2 / \epsilon_{11} + x_2^2 / \epsilon_{22} + x_3^2 / \epsilon_{33})^{3/2}}.$$

可见,在以 $x_1=x_2=x_3$ 为半径的球面上各点的电场强度的大小是不相同的,显示了静电场的各向异性.

例 2 计算一个均匀带电圆环在单轴晶体介质内在其轴上一点的电场强度.

如图 1 所示,设圆环半径为 a ,线电荷密度为 τ ,圆环位于 x_1-x_2 平面内,圆心在原点.对单轴晶体有 $\epsilon_{11}=\epsilon_{22}=\epsilon$,因此

$$R_1^2/\epsilon_{11} + R_2^2/\epsilon_{22} + R_3^2/\epsilon_{33} = a^2/\epsilon + R_3^2/\epsilon_{33}$$

为一恒量,可提到式(2)的积分号外,

$$E(x) = \frac{\tau d}{4\pi \epsilon \sqrt{\epsilon_{33}(a^2/\epsilon + R_3^2/\epsilon_{33})^{3/2}}} \int_0^{2\pi} \left(\frac{R_1}{\epsilon} e_1 + \frac{R_2}{\epsilon} e_2 + \frac{R_3}{\epsilon_{33}} e_3 \right) d\theta,$$

式中 $R_1 = a \cos \theta, R_2 = a \sin \theta$,所以位于轴上 $x_3 = R_3$ 的一点电场强度为 $E(x) = [R_3 q / 4\pi \epsilon \epsilon_{33}^{3/2} (a^2/\epsilon + R_3^2/\epsilon_{33})^{3/2}] e_3$. 可见,轴上的场强有赖于此轴与介质的三个主轴中的哪一个主轴重合,若与 x_1 轴或 x_2 轴重合,则上式中的 ϵ_{33} 分别由 ϵ_{11} 和 ϵ_{22} 替换之.

例 3 均匀带电的无限长直导线的电荷线密度为 τ ,求在各向异性介质中的静电场强度.

选取在各向异性坐标系 ξ_1, ξ_2, ξ_3 中求解. 设观察点 p 到导线的垂直距离为 D_y (图 2), 电荷元 $\tau d\xi_3$ 到 P 点的距离为 y , 则

$$\begin{aligned} \rho(\xi) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 &= \rho(\xi' \epsilon' \cdot x') d x_1' d x_2' d x_3' / \sqrt{\epsilon_{11}\epsilon_{22}\epsilon_{33}} \\ &= \tau d\xi_3 / \sqrt{\epsilon_{11}\epsilon_{22}}, \end{aligned}$$

故电场强度的普遍公式应用于本题写成 $E(\xi) = \frac{\tau}{4\pi \sqrt{\epsilon_{11}\epsilon_{22}}} \epsilon' \epsilon'$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi_3}{y^2} e_y$, 由图 2 见到 $e_y = \cos \beta e_{D_y} - \sin \beta e_3, y = D_y \sec \beta, \xi_3 = D_y \tan \beta, d\xi_3 = D_y \sec^2 \beta d\beta$.

因而积分后得

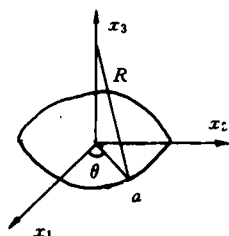


图 1 单轴晶体中带电圆环的场强

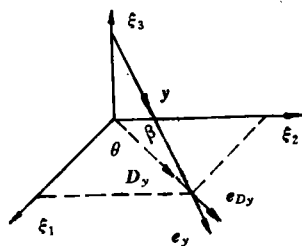


图 2 无限长带电线在各向异性介质中场强

$$E(\xi) = \frac{\tau}{4\pi\sqrt{\epsilon_{11}\epsilon_{22}}} \epsilon' \epsilon' \cdot \frac{2}{D_y} e_{D_y} = \frac{\tau}{2\pi\sqrt{\epsilon_{11}\epsilon_{22}} D_y} (\cos\theta e_1 / \sqrt{\epsilon_{11}} + \sin\theta e_2 / \sqrt{\epsilon_{22}}),$$

现必须经坐标变换式(3),变换回原来坐标系 x_1, x_2, x_3 中,得所求为

$$E(x) = \frac{\tau}{2\pi\sqrt{\epsilon_{11}\epsilon_{22}}} \cdot \frac{1}{(x_1^2/\epsilon_{11} + x_2^2/\epsilon_{22})^{1/2}} \cdot (\cos\theta e_1 / \sqrt{\epsilon_{11}} + \sin\theta e_2 / \sqrt{\epsilon_{22}}).$$

例4 试用高斯定理求无限大均匀带电平面在各向异性介质中的静电场强度.

取 ϵ_{ij} 的三个主轴与 x_1, x_2, x_3 轴平行,并令 x_2-x_3 平面为带电平面,作一个直角平行六面体闭合面如图3所示.无限大平面的电荷分布要求电场 E 垂直于电荷所在平面,即 $E = \pm E_1 e_1$,通量只由该平行六面体的两端面 s_1 和 s_2 发射出去.此时式(9)写成

$$\int_{s_1} \epsilon_{11} E_1 e_1 \cdot ds_1 e_1 + \int_{s_2} \epsilon_{11} E_1 (-e_1) \cdot ds_2 (-e_1) = \sigma s,$$

得所求电场强度为 $E = E_1 = \sigma / 2\epsilon_{11}$.

例5 由高斯定理证明,点电荷 q 在各向异性介质中产生的静电场是

$$E(x) = \frac{q}{4\pi\sqrt{\epsilon_{11}\epsilon_{22}\epsilon_{33}}} \frac{R_1 e_1 / \epsilon_{11} + R_2 e_2 / \epsilon_{22} + R_3 e_3 / \epsilon_{33}}{(R_1^2 / \epsilon_{11} + R_2^2 / \epsilon_{22} + R_3^2 / \epsilon_{33})^{3/2}}. \quad (10)$$

取 ϵ_{ij} 的三个主轴与 x_1, x_2, x_3 重合,并令 q 位于原点,作一个边长分别为 $2a_i = 2a\sqrt{\epsilon_{ii}}$ ($i=1,2,3$),中心与原点重合的闭合长方体,如图4所示.现用逆证法,设已知长方体的六面上的电场强度为式(10)所示,要证得被长方体的六个面包围的电荷等于点电荷 q .把高斯定理式(9)的左边应用于长方体的六个面上,得

$$\oint (\epsilon \epsilon \cdot E) \cdot dS = 2 \int_{x_1=a\sqrt{\epsilon_{11}}} \epsilon_{11} E_1 dx_2 dx_3 + 2 \int_{x_2=a\sqrt{\epsilon_{22}}} \epsilon_{22} E_2 dx_1 dx_3 + 2 \int_{x_3=a\sqrt{\epsilon_{33}}} \epsilon_{33} E_3 dx_1 dx_2.$$

这三个积分的结果是一样的.这从下面的积分过程中可以看出.因此,只计算其中一个积分就可得到普遍结果.

$$\int_{x_1=a\sqrt{\epsilon_{11}}} \epsilon_{11} E_1 dx_2 dx_3 = \frac{q}{4\pi\sqrt{\epsilon_{11}\epsilon_{22}\epsilon_{33}}} \int_{x_1=a\sqrt{\epsilon_{11}}} \frac{R_1 dx_2 dx_3}{(R_1^2 / \epsilon_{11} + R_2^2 / \epsilon_{22} + R_3^2 / \epsilon_{33})^{3/2}}$$

在 $x_1 = a\sqrt{\epsilon_{11}}$ 面上,由于 $x_1 = a\sqrt{\epsilon_{11}}, x'_1 = x'_2 = x'_3 = 0$,故 $R_1 = x_1 - x'_1 = a\sqrt{\epsilon_{11}}, R_2 = x_2 - x'_2 = x_2, R_3 = x_3 - x'_3 = x_3$,则

$$\int_{x_1=a\sqrt{\epsilon_{11}}} \epsilon_{11} E_1 dx_2 dx_3 = \frac{q}{4\pi\sqrt{\epsilon_{11}\epsilon_{22}\epsilon_{33}}} \int_{x_1=a\sqrt{\epsilon_{11}}} \frac{a\sqrt{\epsilon_{11}} dx_2 dx_3}{(a^2 + R_2^2 / \epsilon_{22} + R_3^2 / \epsilon_{33})^{3/2}}.$$

作变换, $y_i = x_i / \sqrt{\epsilon_{ii}}$ ($i=2,3$),则上式变成

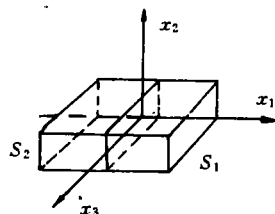


图3 各向异性介质中无限大带电平面的场强

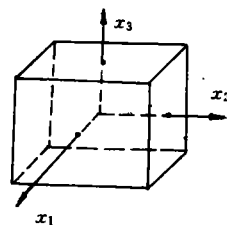


图4 各向异性介质中高斯定理的证明

$$\int_{x_1=a} \sqrt{\epsilon_{11}} \epsilon_{11} E_1 dx_2 dx_3 = \frac{qa}{4\pi} \int_{-a}^{+a} dy_3 \int_{-a}^{+a} dy_2 \frac{1}{(a^2 + y_2^2 + y_3^2)} = \frac{qa^2}{\pi} \int_0^a \frac{dy_3}{(a^2 + y_3^2) \sqrt{y_3^2 + 2a^2}}.$$

在上式积分中, 令 $u^2 = y_3^2 + a^2$, 则 $dy_3 = udu / \sqrt{u^2 - a^2}$, 故 $\int_0^a \frac{dy_3}{(a^2 + y_3^2)(\sqrt{y_3^2 + 2a^2})} =$

$$\int_{y_3=0}^{y_3=a} \frac{udu}{u^2 \sqrt{u^2 - a^2} \sqrt{u^2 + a^2}} = (\arccos \frac{1}{2} - \arccos 1) / 2a^2 = \frac{\pi}{6a^2}, \text{ 即 } \int_{x_1=a} \sqrt{\epsilon_{11}} \epsilon_{11} E_1 dx_2 dx_3 =$$

$q/6$. 从计算过程中可看到, 剩下的两个积分 $\int_{x_2=a} \sqrt{\epsilon_{22}} E_2 dx_1 dx_3$ 和 $\int_{x_3=a} \sqrt{\epsilon_{33}} E_3 dx_1 dx_2$ 与上

述积分有同样的结果. 因此, 高斯定理应用于此长方体(在 $y_i = x_i / \sqrt{\epsilon_{ii}}$ 的各向异性坐标系中, 则是一边长为 $2a$ 的正方体)的结果是 $\oint (\epsilon \epsilon \cdot E) \cdot dS = q$, 与预期结果一致. 因此, 点电荷 q 在各向异性介质中产生的静电场为

$$E(x) = \frac{q}{4\pi \sqrt{\epsilon_{11}\epsilon_{22}\epsilon_{33}}} \frac{R_1 e_1 / \epsilon_{11} + R_2 e_2 / \epsilon_{22} + R_3 e_3 / \epsilon_{33}}{(R_1^2 / \epsilon_{11} + R_2^2 / \epsilon_{22} + R_3^2 / \epsilon_{33})^{3/2}}.$$

这个公式是正确的.

此例的结果也从另一方面证明了高斯定理推广到各向异性介质中的形式 $\oint (\epsilon \epsilon \cdot E) \cdot dS = \int \rho dv$, $\nabla \cdot (\epsilon \epsilon \cdot E) = \rho$ 是完全正确的.

参 考 文 献

- 1 陈荣年, 何煜光, 陈洁. 网络现代场论. 北京: 电子工业出版社, 1991. 1~321
- 2 陈荣年, 何煜光. 非线性网络与线性网络统一的场论说. 中国科学(A辑), 1994, 24(12): 1316~1326
- 3 郭震宁, 陈荣年. 在各向异性介质中电势的多极矩展开. 华侨大学学报(自然科学版), 1993, 14(4): 440~446
- 4 郭震宁, 陈荣年, 林文枝. 带电椭球在各向异性介质中的静电势. 华侨大学学报(自然科学版), 1994, 15(2): 163~167
- 5 苏武浔, 魏腾雄, 刘强生. 在各向异性介质中静电势的微分方程及其解. 华侨大学学报(自然科学版), 1996, 17(3): 308~311

Strength of Electrostatic Field in Anisotropic Medium and Gauss Theorem

Su Wuxun Wei Tengxiong Chen Xinnian

(Dept. of Electron. Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract By make use of the general formula of anisotropic electrostatic potential, the authors give a general formula of the strength of electrostatic field in linear anisotropic medium and the Gauss theorem; and solve the electrostatic field of the distribution of several kinds of electric charges in the above medium. Thus they substantiate a basic content of anisotropic electrostatic field.

Keywords dielectric, anisotropy, strength of electrostatic field, Gauss theorem