

各向异性磁介质毕奥-萨伐尔定律极坐标形式*

王建成^① 陈榮年^②

(^①华侨大学电气技术系, ^②华侨大学电子工程系, 泉州 362011)

摘要 给出磁各向异性介质中的毕奥-萨伐尔定律的极坐标形式. 据此, 可求出若干电流按曲线方程 $r=r(\theta)$ 分布的极坐标极点处的磁场, 比用定律的笛卡儿坐标形式求解来得简便.

关键词 磁场, 各向异性, 极坐标

分类号 TM 154.3

在各向异性磁介质中磁矢势 A 的积分公式为^[1~2]

$$A_i(x) = \frac{1}{4\pi \sqrt{|\mu_{ij}|}} \sum_{j=1}^3 \Delta_{ij} \int \frac{j_i(x') dV'}{\sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \mu_{nm}^{-1} (r_n r_m)^{1/2}} \quad (i = 1, 2, 3).$$

文[3]应用此公式导出在各向异性磁介质中的毕奥-萨伐尔定律的直角坐标形式, 并利用该定律求出在各向异性介质中若干电流分布所激发的磁场. 但是, 求解时要求矢径 $r=r_1e_1+r_2e_2+r_3e_3$ 的三个分量中, 仅有一个分量是积分变量, 而另两个分量必须是积分恒量, 才使定律可积, 所以受到一定限制. 如果通电导线位于某一平面内, 而且其电流曲线方程的极坐标形式 $r=r(\theta)$ 已知, 则可以利用本文给出的在各向异性磁介质中的毕奥-萨伐尔定律的极坐标形式, 求出电流分布极坐标极点处的磁场. 某些分布于某个平面内的线电流的磁场, 应用毕奥-萨伐尔定律的直角坐标形式可能无法求解, 而应用极坐标形式可以较简便地求出其极点的磁场.

1 毕奥-萨伐尔定律的极坐标形式

在各向异性磁介质中毕奥-萨伐尔定律的形式之一为^[3]

$$B(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{J' \times y'}{y^3} dV', \quad (1)$$

式中 $J'(x') = a_1 j_1(x')e_1 + a_2 j_2(x')e_2 + a_3 j_3(x')e_3$; $y' = y_1'e_1 + y_2'e_2 + y_3'e_3$; $y = (y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2)^{1/2}$; $dV' = dx_1' dx_2' dx_3'$. 其中 $a_1 = \sqrt{\mu_{22}\mu_{33}/\mu_{11}}$, $a_2 = \sqrt{\mu_{11}\mu_{33}/\mu_{22}}$, $a_3 = \sqrt{\mu_{11}\mu_{22}/\mu_{33}}$; $j = j_1(x')e_1 + j_2(x')e_2 + j_3(x')e_3$; $y_1' = y_1/\sqrt{\mu_{11}}$, $y_2' = y_2/\sqrt{\mu_{22}}$, $y_3' = y_3/\sqrt{\mu_{33}}$; $y_1 = r_1/\sqrt{\mu_{11}}$, $y_2 = r_2/\sqrt{\mu_{22}}$, $y_3 = r_3/\sqrt{\mu_{33}}$; e_1, e_2, e_3 分别是直角坐标轴 X, Y, Z 的三个单位矢量; $r = r_1e_1 + r_2e_2 + r_3e_3 = x - x'$, r 为源点矢径 x' 端点指向场点矢径 x 端点的矢径.

如引入并矢 μ' 为

* 本文 1996-04-20 收到; 福建省自然科学基金资助项目

$$\mu' = \sqrt{\mu_{11}/\mu_{22}\mu_{33}}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \sqrt{\mu_{22}/\mu_{11}\mu_{33}}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \sqrt{\mu_{33}/\mu_{11}\mu_{22}}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3, \quad (2)$$

则式(1)表为含有并矢 μ' 的磁各向异性的毕奥-萨伐尔定律

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu'}{4\pi} \cdot \int \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{(r_1^2/\mu_{11} + r_2^2/\mu_{22} + r_3^2/\mu_{33})^{3/2}} dV'. \quad (3)$$

当电流作线分布时,上式可写成^[3]

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu'}{4\pi} \cdot \int \frac{Id\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{(r_1^2/\mu_{11} + r_2^2/\mu_{22} + r_3^2/\mu_{33})^{3/2}}, \quad (4)$$

式(1),(3),(4)均为磁各向异性毕奥-萨伐尔定律在直角坐标系中的形式.

若通电导线位于某一平面内,对于该平面内的任意场点, \mathbf{B} 的方向垂直于该平面,于是式(4)可简化. 例如,通电导线位于 XY 平面内,对于该平面内的任意场点, \mathbf{B} 的方向总是沿着 Z 的方向. 因 $r_1 = r\cos\theta$, $r_2 = r\sin\theta$, 于是式(4)可简化为

$$B = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_{33}}{\mu_{11}\mu_{22}}} \int \frac{Idl \sin\alpha}{r^2(\cos^2\theta/\mu_{11} + \sin^2\theta/\mu_{22})^{3/2}}. \quad (5)$$

如图1所示,取场点 O 为极坐标的极点,如通电导线的极坐标曲线方程为: $r=r(\theta)$. 因有 $dl \sin\alpha = r d\theta$. 于是式(5)可化为

$$B = \frac{I}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_{33}}{\mu_{11}\mu_{22}}} \int \frac{d\theta}{r(\theta)(\cos^2\theta/\mu_{11} + \sin^2\theta/\mu_{22})^{3/2}}. \quad (6)$$

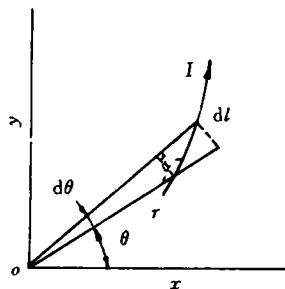


图1 极坐标形式

同样,若通电导线位于 YZ 平面内或 ZX 平面内,那么式(4)分别简化为

$$B = \frac{I}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_{11}}{\mu_{22}\mu_{33}}} \int \frac{d\theta}{r(\theta)(\frac{\cos^2\theta}{\mu_{22}} + \frac{\sin^2\theta}{\mu_{33}})^{3/2}} \text{ 或 } B = \frac{I}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_{22}}{\mu_{11}\mu_{33}}} \int \frac{d\theta}{r(\theta)(\frac{\cos^2\theta}{\mu_{11}} + \frac{\sin^2\theta}{\mu_{33}})^{3/2}}, \quad (7)$$

式(6),(7)就是所求的磁各向异性毕奥-萨伐尔定律的极坐标形式. 式中仅有一个积分变量.

当磁介质为各向同性时,因有 $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu$. 则式(6),(7)可简并为

$$B = \frac{\mu I}{4\pi} \int \frac{d\theta}{r(\theta)}, \quad (8)$$

式(8)为在各向同性磁介质中毕奥-萨伐尔定律的极坐标形式,与文[4]所导出的结果一致.

2 应用

2.1 载流直导线的磁场

设载流直导线位于 XY 平面内,通有电流 I ,沿 Y 轴分布,如图2所示. 求距直导线为 a 的极点 O 的磁场. 此时的极坐标曲线方程 $r=r(\theta)$ 化为 $r=a/\cos\theta$,代入式(6)得

$$B = \frac{\mu_{11}I}{4\pi a} \sqrt{\frac{\mu_{33}}{\mu_{22}}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sec^2\theta d\theta}{(1 + \frac{\mu_{11}}{\mu_{22}} \tan^2\theta)^{3/2}}, \quad (9)$$

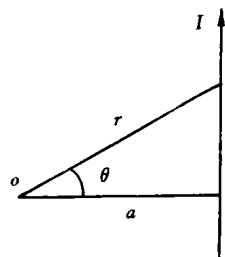


图2 载流直导线的磁场

作变换,则 $\sqrt{\mu_{11}/\mu_{22}} \tan\theta = \tan\beta$, 即 $\sec^2\theta d\theta = \sqrt{\mu_{22}/\mu_{11}} \sec^2\beta d\beta$, 代入

式(9)得极坐标极点 O 的磁感应强度 B 的大小为

$$B = \frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{33}}}{4\pi a} I (\sin\beta_2 - \sin\beta_1) \quad (\beta_1 = \arctg(\sqrt{\frac{\mu_{11}}{\mu_{22}}} \operatorname{tg}\theta_1), \beta_2 = \arctg(\sqrt{\frac{\mu_{11}}{\mu_{22}}} \operatorname{tg}\theta_2)). \quad (10)$$

当载流直导线为无限长时, 因有 $\beta_1 \rightarrow -\pi/2, \beta_2 \rightarrow \pi/2$, 故式(10)化为

$$B = \sqrt{\mu_{11}\mu_{33}} I / 2\pi a, \quad (11)$$

若载流直导线位于 YZ 平面内, 电流沿 Z 轴分布, 则式(10)变为

$$B = \frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}}{4\pi a} I (\sin\beta_2 - \sin\beta_1) \quad (\beta_1 = \arctg(\sqrt{\frac{\mu_{22}}{\mu_{33}}} \operatorname{tg}\theta_1), \beta_2 = \arctg(\sqrt{\frac{\mu_{22}}{\mu_{33}}} \operatorname{tg}\theta_2)). \quad (12)$$

当载流直导线为无限长时, 式(12)化为

$$B = \sqrt{\mu_{11}\mu_{22}} I / 2\pi a, \quad (13)$$

若载流直导线位于 ZX 平面内, 电流沿 X 轴分布, 则式(10)变为

$$B = \frac{\sqrt{\mu_{22}\mu_{33}}}{4\pi a} I (\sin\beta_2 - \sin\beta_1) \quad (\beta_1 = \arctg(\sqrt{\frac{\mu_{33}}{\mu_{11}}} \operatorname{tg}\theta_1), \beta_2 = \arctg(\sqrt{\frac{\mu_{33}}{\mu_{11}}} \operatorname{tg}\theta_2)). \quad (14)$$

当载流直导线为无限长时, 式(14)化为

$$B = \sqrt{\mu_{22}\mu_{33}} I / 2\pi a. \quad (15)$$

式(10)~(15)的结果与文[3]的结果一致.

当介质为各向同性时, 因有 $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu, \theta_1 = \beta_1, \theta_2 = \beta_2$, 于是式(10), (12), (14)化为 $B = \frac{\mu}{4\pi a} I (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$, 式(11), (13), (15)化为 $B = \mu I / 2\pi a$. 这正是通常情况下的载流直导线和无限长载流直导线的磁场公式.

2.2 圆电流中心的磁场

如图3所示, 设载有电流 I , 半径为 R 的圆电流位于 YZ 平面. 圆电流中心 O 点的磁场沿 X 方向. 因有 $r=R$. 代入式(7), 得极点 O 处磁感应强度的大小为

$$B = \frac{I}{4\pi R} \sqrt{\frac{\mu_{11}}{\mu_{22}\mu_{33}}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(\frac{\cos^2\theta}{\mu_{22}} + \frac{\sin^2\theta}{\mu_{33}})^{3/2}}, \quad (16)$$

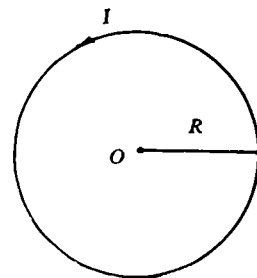


图3 圆电流中心的磁场

式(16)为椭圆积分. 令 $K^2 = (\mu_{33} - \mu_{22}) / \mu_{33} < 1$, 代入式(16)得

$$B = \frac{\mu_{22} I}{\pi R} \sqrt{\frac{\mu_{11}}{\mu_{33}}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - K^2 \sin^2\theta)^{3/2}} = \frac{\mu_{22} I}{2R} \sqrt{\frac{\mu_{11}}{\mu_{33}}} [1 + (\frac{1}{2})^2 \cdot 3K^2 + (\frac{1}{2})^2 \cdot (\frac{3}{4})^2 \cdot 5K^4 + (\frac{1}{2})^2 \cdot (\frac{3}{4})^2 \cdot (\frac{5}{6})^2 \cdot 7K^6 + \dots]. \quad (17)$$

若仅取第一项, 由式(17)得近似值 $B = (\mu_{22} I / 2R) \cdot \sqrt{\mu_{11} / \mu_{33}}$, 当介质为线性各向同性时, 因有 $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu$, 且式(17)展开式中 $K=0$. 于是式(17)化为通常情况下载流圆线圈圆心处的磁场, $B = \mu I / 2R$, 这是公认的结果.

2.3 部分圆电流的磁场

如图4所示,部分圆电流位于 XY 平面,通有电流 I , P 为部分圆电流圆周上电流未流过的点,圆的半径为 R .求极点 P 的磁感应强度.此种情况,极坐标曲线方程 $r=r(\theta)$ 为 $r=2R\cos\theta$,代入式(6)得极点 P 的磁感应强度的大小为

$$B = \frac{I}{8\pi R} \sqrt{\frac{\mu_{33}}{\mu_{11}\mu_{22}}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\cos\theta(\cos^2\theta/\mu_{11} + \sin^2\theta/\mu_{22})^{3/2}}.$$

令 $\operatorname{tg}\theta=t$,则 $\sin^2\theta=t^2/(1+t^2)$, $\cos^2\theta=1/(1+t^2)$, $d\theta=dt/(1+t^2)$, $t_1=\arctan t_1$, $t_2=\arctan t_2$,代入上式得

$$B = \frac{I}{8\pi R} \sqrt{\frac{\mu_{33}}{\mu_{11}\mu_{22}}} \int_{t_1}^{t_2} \frac{(1+t^2)dt}{(1/\mu_{11} + t^2/\mu_{22})^{3/2}} \\ = \frac{I \sqrt{\mu_{33}}}{8\pi R} \left[\frac{\mu_{22}}{\mu_{11}} \ln \frac{\operatorname{tg}\theta_2 + \sqrt{\mu_{22}/\mu_{11} + \operatorname{tg}^2\theta_2}}{\operatorname{tg}\theta_1 + \sqrt{\mu_{22}/\mu_{11} + \operatorname{tg}^2\theta_1}} + \frac{(\mu_{22} - \mu_{11})\operatorname{tg}\theta_1}{\sqrt{\mu_{22} + \mu_{11}\operatorname{tg}^2\theta_1}} + \frac{(\mu_{11} - \mu_{22})\operatorname{tg}\theta_2}{\sqrt{\mu_{22} + \mu_{11}\operatorname{tg}^2\theta_2}} \right].$$

当介质为各向同性时,因有 $\mu_{11}=\mu_{22}=\mu_{33}=\mu$,上式化为 $B=\frac{\mu I}{8\pi R} \ln(\cos\theta_1(1+\sin\theta_2)/\cos\theta_2(1+\sin\theta_1))$,这是已知的结果^[4].

利用毕奥-萨伐尔定律的极坐标形式,还可以求出载流的圆锥曲线的焦点及其它曲线的极点的磁场.这些内容将另文表述.

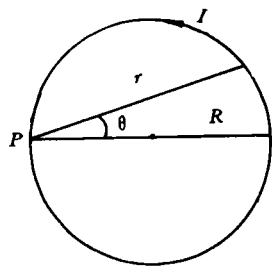


图4 部分圆电流的磁场

参 考 文 献

- 1 陈荣年,陈洁.各向异性磁介质的电感新公式.电子科学学报,1991,13(2):159~168
- 2 陈荣年,王建成.各向异性磁矢势 A 的微分方程及其解.华侨大学学报(自然科学版),1996,17(1):90~97
- 3 王建成,陈荣年.磁各向异性的毕奥-萨伐尔定律及其应用.华侨大学学报(自然科学版),1989,10(2):125~132
- 4 蔡领. Biot-Savart 定律的极坐标形式.华东冶金学院学报,1992,9(2):116~121

Polar Coordinate Form of Biot-Savart Law in Magnetic Anisotropic Medium

Wang Jiancheng^① Chen Shennian^②

(^①Dept. of Electric Technique, Huaqiao Univ., ^②Dept. of Electron. Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract In relation to Biot-Savart Law, the author give its polar coordinate form in magnetic anisotropic medium. On this basis, the magnetic field of several current distributing according to curve equation $r=r(\theta)$ at pole point of polar coordinate can be solved. As compared with that solved by the Cartesian coordinate form of the law, this is a handy way.

Keywords magnetic field, anisotropy, polar coordinate form