

具有无限时滞的微积分方程的周期解的存在性与唯一性*

王全义

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

摘要 研究一些具有无限时滞的微积分方程的周期解的存在性及唯一性等问题, 并得到一些新结果.

关键词 微积分方程, 无限时滞, 周期解, 存在性, 唯一性

分类号 O 175.6

文[1~2]研究过如下的 Volterra 微积分方程, 即

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \int_{-\infty}^t C(t,s)x(s)ds + f(t) \quad (1)$$

的周期解的存在性问题. 本文将研究比方程(1)更为广泛的一类微积分方程, 即

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \int_{-\infty}^t C(t,s)x(s)ds + g(t, x(t)), \quad (2)$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \int_{-\infty}^t C(t-s)x(s)ds + g(t, x(t)) \quad (3)$$

的周期解的存在性和唯一性问题. 其中 $x \in \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}$, $A(t) = (a_{ij}(t))_{n \times n}$, $C(t, s) = (C_{ij}(t, s))_{n \times n}$, $C(t) = (C_{ij}(t))_{n \times n}$ 都是 n 阶函数矩阵; $A(t)$ 在 \mathbf{R} 上连续, $C(t, s)$ 及 $C(t-s)$ 在 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 上连续; $g: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 连续. 由此得到了一些新结果.

1 主要结果

对于方程(2), (3), 我们假设下列条件.

(1) $A(t)$ 是 t 的 T -周期函数且 $\frac{1}{T} \int_0^T b(t)dt = a > 0$, 其中 $b(t) = \max_{1 \leq j \leq n} \{a_{jj}(t) - \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}(t)|\}$.

(2) $C(t, s)$ 满足下列条件: (a) $\int_{-\infty}^t \|C(t, s)\| ds$ 有界; (b) 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在着 $L = L(\epsilon) > 0$, 使得对于任意的 $t_1 > -\infty$, $t - t_1 \geq L$, 有 $\int_{-\infty}^{t_1} \|C(t, s)\| ds < \epsilon$; (c) 对任意的 $t, s \in \mathbf{R}$, 有 $C(t+T, s+T) = C(t, s)$.

* 本文 1996-03-24 收到; 福建省自然科学基金资助项目

(3) $g(t, x)$ 关于 t 是 T -周期的且存在着非负连续的 T -周期函数 $b_1(t)$, 使得 $\|g(t, x) - g(t, y)\| \leq b_1(t) \|x - y\|$ 对任意的 $t \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^n$ 成立.

(4) $g(t, x)$ 关于 t 是 T -周期的且存在着非负连续的 T -周期函数 $b_2(t)$, 使得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sup_{\|x\| \leq n} \|g(t, x)\| = b_2(t)$ 对 $t \in \mathbb{R}$ 一致成立.

(5) 存在着常数 $k > 1$, 使得当 $t \in \mathbb{R}$ 时, 有 $b(t) \geq k \left[\int_{-\infty}^t \|C(t, s)\| ds + b_1(t) \right]$, 其中 $b(t)$ 由条件(1)给出, $b_1(t)$ 由条件(3)给出.

(6) 存在着常数 $k > 1$, 使得当 $t \in \mathbb{R}$ 时, 有 $b(t) \geq k \left[\int_{-\infty}^t \|C(t, s)\| ds + b_2(t) \right]$, 其中 $b(t)$ 由条件(1)给出, $b_2(t)$ 由条件(4)给出.

(7) $\int_{-\infty}^0 \|C(s)\| ds$ 有界且存在着常数 $k > 1$, 使得当 $t \in \mathbb{R}$ 时, 有 $b(t) \geq k \left[\int_{-\infty}^0 \|C(s)\| ds + b_1(t) \right]$, 其中 $b(t)$ 由条件(1)给出, $b_1(t)$ 由条件(3)给出.

(8) $\int_{-\infty}^0 \|C(s)\| ds$ 有界且存在着常数 $k > 1$, 使得当 $t \in \mathbb{R}$ 时, 有 $b(t) \geq k \left[\int_{-\infty}^0 \|C(s)\| ds + b_2(t) \right]$, 其中 $b(t)$ 由条件(1)给出, $b_2(t)$ 由条件(4)给出.

(9) 存在着常数 $k > 1$, 使得当 $t \in \mathbb{R}$ 时, 有 $b(t) \geq k \int_{-\infty}^t \|C(t, s)\| ds$, 其中 $b(t)$ 由条件(1)给出.

文[1]称条件(2)中(b)为方程(1)(或(2))具有“衰退记忆”.

定理 1 若条件(1)~(3)及(5)被满足, 则方程(2)具有唯一的 T -周期解.

从定理 1 易知下列推论是成立的.

推论 1 若条件(1), (2)及(9)被满足, 则方程(1)具有唯一的 T -周期解.

推论 2 若条件(1), (3)及(7)被满足, 则方程(3)具有唯一的 T -周期解.

定理 2 若条件(1), (2), (4)及(6)被满足, 则方程(2)至少存在着一个 T -周期解.

从定理 2 易知下面推论是成立的.

推论 3 若条件(1), (4)及(8)被满足, 则方程(3)至少存在着一个 T -周期解.

2 一些引理

本节先介绍一些有用的引理. 因篇幅限制, 故只给出部分引理的证明, 其余证明从略. 考虑如下微分方程

$$dx/dt = A(t)x, \quad (4)$$

$$dx/dt = A(t)x + \int_{-\infty}^t C(t, s)f_1(s)ds + f_2(t), \quad (5)$$

其中 $t, x, A(t), C(t, s)$ 如前所述. $f_1(t), f_2(t)$ 都是 n 维连续的 T -周期函数.

引理 1 设 $Z(t)$ 是式(4)的基本解矩阵, 则有

$$\|Z(t)Z^{-1}(s)\| \leq \exp\left(-\int_s^t b(r)dr\right) \quad (s \geq t), \quad (6)$$

其中 $b(t) = \max_{1 \leq j \leq n} \{a_{jj}(t) - \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}(t)|\}$.

证 设 $x(t)$ 是式(4)的任一非零解. 取李雅普诺夫函数 $V(x(t)) = \|x(t)\| = \sum_{j=1}^n |x_j(t)|$, 于是有

$$\begin{aligned} \frac{dV(x(t))}{dt} \Big|_{(4)} &\geq a_{11}(t)|x_1(t)| - |a_{12}(t)| \cdot |x_2(t)| - \cdots - |a_{1n}(t)| \cdot |x_n(t)| \\ &\quad - |a_{21}(t)| \cdot |x_1(t)| + a_{22}(t) \cdot |x_2(t)| - \cdots - |a_{2n}(t)| \cdot |x_n(t)| - \cdots \\ &\quad - |a_{n1}(t)| \cdot |x_1(t)| - \cdots - |a_{nn-1}(t)| \cdot |x_{n-1}(t)| + a_{nn}(t) \cdot |x_n(t)| \\ &= \sum_{j=1}^n (a_{jj}(t) - \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}(t)|) |x_j(t)| \\ &\geq b(t) \|x(t)\| = b(t)V(x(t)), \end{aligned}$$

从而有 $V(x(t)) \leq V(x(s)) \exp(-\int_s^t b(r)dr)$ ($s \geq t$), 所以, $\|x(t)\| / \|x(s)\| \leq \exp(-\int_s^t b(r)dr)$ ($s \geq t$).

因 $\|Z(t)Z^{-1}(s)\| = \sup_{\|x_0\| \neq 0} \|Z(t)Z^{-1}(s)x_0\| / \|x_0\|$, 令 $x_1 = Z^{-1}(s)x_0$, 则 $\|Z(t)Z^{-1}(s)\| = \sup_{\|x_1\| \neq 0} \|Z(t)x_1\| / \|Z(s)x_1\| = \sup_{\|x_1\| \neq 0} \|x(t)\| / \|x(s)\| \leq \exp(-\int_s^t b(r)dr)$ ($s \geq t$), 即式(6)成立. 引理1证毕.

引理2 设 $C(t, s)$ 是 n 阶连续函数矩阵且满足条件(2). 若 $f_1(t)$ 是 n 维连续的 T -周期函数, 则 $g(t) = \int_{-\infty}^t C(t, s)f_1(s)ds$ 也是连续的 T -周期函数.

引理3 设 $b(t)$ 是非负的连续的 T -周期函数. 如果 $\frac{1}{T} \int_0^T b(r)dr = a > 0$, 则有 $\exp(-\int_s^t b(r)dr) \leq \beta \exp(-a(s-t))$ ($s \geq t$), 其中 $\beta = e^{aT}$.

由引理1, 2, 3 可证得引理4.

引理4 如果条件(1), (2), (9)成立, 则方程(5)存在着唯一的 T -周期解 $x(t)$, 满足

$$x(t) = - \int_t^{+\infty} Z(t)Z^{-1}(r) \left[\int_{-\infty}^r C(r, s)f_1(s)ds + f_2(r) \right] dr, \quad (7)$$

其中 $Z(t)$ 是方程(4)的基本解方阵.

3 定理的证明

3.1 定理1的证明

设 $D = \{V(t) | V: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n \text{ 连续的 } T\text{-周期函数}\}$, 则 D 在范数 $\|V\| = \sup\{\|V(t)\| : 0 \leq t \leq T\}$ 下是个 Banach 空间. 对任意的 $V \in D$, 考虑下列微分方程

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \int_{-\infty}^t C(t, s)V(s)ds + g(t, V(t)). \quad (8)$$

由定理的条件及引理2知 $[\int_{-\infty}^t C(t, s)V(s)ds + g(t, V(t))]$ 是连续的 T -周期函数. 又从引理4知式(8)具有唯一的 T -周期解, 即

$$x_v(t) = - \int_t^{+\infty} Z(t)Z^{-1}(r) \left[\int_{-\infty}^r C(r, s)V(s)ds + g(r, V(r)) \right] dr. \quad (9)$$

现在定义算子 $G: D \rightarrow D$ 为

$$GV(t) = x_v(t) \quad \forall V \in D. \quad (10)$$

下面证明算子 G 在 D 中是压缩的. 事实上, 对任意的 $V_1, V_2 \in D$, 由式(9), (10)及定理的条件可知

$$\begin{aligned} \|GV_1(t) - GV_2(t)\| &\leq \int_t^{+\infty} \|Z(t)Z^{-1}(r)\| \left[\int_{-\infty}^r \|C(r,s)\| \cdot \|V_1(s) - V_2(s)\| ds \right. \\ &\quad \left. + \|g(r, V_1(r)) - g(r, V_2(r))\| \right] dr \\ &\leq \|V_1 - V_2\| \int_t^{+\infty} \exp\left(-\int_t^r b(s)ds\right) \left[\int_{-\infty}^r \|C(r,s)\| ds + b_1(r) \right] dr \\ &\leq \|V_1 - V_2\| \int_t^{+\infty} \exp\left(-\int_t^r b(s)ds\right) (b(r)/k) dr \\ &= \|V_1 - V_2\| / k, \end{aligned} \quad (11)$$

即 $\|GV_1 - GV_2\| \leq \|V_1 - V_2\| / k$. 因 $k > 1$, 故 $1/k < 1$, 从而 G 在 D 中是压缩的. 故 G 在 D 中具有唯一的不动点. 易见 G 在 D 中的这个不动点就是式(2)的唯一 T -周期解. 定理 1 证毕.

3.2 定理 2 的证明

设算子 G 及 Banach 空间 D . 我们先证: 在这个定理的条件下, D 中存在着一个紧子集 D_0 . 使得 $G: D_0 \rightarrow D_0$ 是一个全连续算子. 记 $D_n = \{V | V \in D \text{ 且 } \|V\| \leq n\}$, 其中 n 为自然数.

(1) 先证存在着自然数 N 使得 $G: D_N \rightarrow D_N$. 下列采用反证法. 若不然, 对任意的自然数 n , 都存在着 $V_n \in D_n$, 使得 $\|GV_n\| > n$. 由条件(4)可知, 对于 $\varepsilon = (k-1)a/2k\beta > 0$ (这里 a 由条件(1)中给出, $\beta = e^{aT}$), 存在着自然数 $N \geq 4/\varepsilon$ 充分大, 使得当 $n \geq N$ 时, 有

$$\frac{1}{n} \sup_{\|x\| \leq n} \|g(t, x)\| \leq b_2(t) + \varepsilon. \quad (12)$$

于是, 由定理的条件及引理 1, 3 及式(9), (10)可得 当 $n \geq N$ 时, 有

$$\begin{aligned} \frac{\|GV_n(t)\|}{n} &\leq \frac{1}{n} \int_t^{+\infty} \|Z(t)Z^{-1}(r)\| \cdot \left[\int_{-\infty}^r \|C(r,s)\| \cdot \|V_n(s)\| ds + \|g(r, V_n(r))\| \right] ds \\ &\leq \int_t^{+\infty} \exp\left(-\int_t^r b(s)ds\right) \left[\frac{\|V_n\|}{n} \int_{-\infty}^r \|C(r,s)\| ds + \frac{\|g(r, V_n(r))\|}{n} \right] dr \\ &\leq \int_t^{+\infty} \exp\left(-\int_t^r b(s)ds\right) \left[\int_{-\infty}^r \|C(r,s)\| ds + b_2(r) + \varepsilon \right] dr \\ &\leq \int_t^{+\infty} \exp\left(-\int_t^r b(s)ds\right) [b(r)/k + \varepsilon] dr \\ &\leq \frac{1}{k} \int_t^{+\infty} \exp\left(-\int_t^r b(s)ds\right) b(r) dr + \beta \varepsilon \int_t^{+\infty} \exp(-a(r-t)) dr \\ &= 1/k + \beta \varepsilon / a = 1/k + (k-1)/2k \\ &< 1/k + (k-1)/k = 1. \end{aligned}$$

因此, 当 n 充分大时, 有 $\|GV_n\|/n < 1$. 这与 $\|GV_n\| > n$ 相矛盾. 故存在着自然数 N 充分大, 使得 $G: D_N \rightarrow D_N$.

(2) 证 GD_N 是 D 中的紧子集. 事实上, 因为 $GD_N \subseteq D_N$, 所以, $\{GV(t) | V \in D_N\}$ 是一致有界. 记 $d_1 = \sup\{\|A(t)\| | t \in [0, T]\}$, $d_2 = \sup\{\int_{-\infty}^t \|C(t,s)\| ds | t \in [0, T]\}$, $d_3 = \sup\{\|g(t, x)\| | (t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}_N\}$, 其中 $\mathbf{R}_N = \{x | x \in \mathbf{R}^n \text{ 且 } \|x\| \leq N\}$. 因为对任意的 $V \in D_N$

有 $dGV(t)/dt = dx_v(t)/dt = A(t)GV(t) + \int_{-\infty}^t C(t,s)V(s)ds + g(t,V(t))$, 故 $\|dGV(t)/dt\| \leq d_1N + d_2N + d_3$. 因此, $\{GV(t) | V \in D_N\}$ 是等度连续的. 于是由 Ascoli-Arzelà 定理知, GD_N 是 D 中的一个紧子集.

(3) 证明 G 在 D_N 中是连续的. 因为 $g(t,x)$ 在 $[0,T] \times \mathbf{R}_N$ 上是一致连续且关于 t 是 T -周期的, 故 $g(t,x)$ 在 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_N$ 上是一致连续的, 从而对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在着 $\delta_1 = \delta_1(\epsilon) > 0$, 使得当 $\|x_1 - x_2\| < \delta_1(x_1, x_2 \in \mathbf{R}_N)$ 时, 有

$$\|g(t, x_1) - g(t, x_2)\| < \epsilon a/4\beta \quad (t \in \mathbf{R}). \quad (13)$$

现取 $\delta = \min\{\delta_1(\epsilon), \epsilon/4\}$. 于是, 由式(9), (10), (13)及定理的条件和引理 1, 3, 可得对于任意的 $V_1, V_2 \in D_N, t \in \mathbf{R}$, 只要 $\|V_1 - V_2\| < \delta$, 就有

$$\begin{aligned} \|GV_1(t) - GV_2(t)\| &\leq \int_t^{+\infty} \exp(-\int_t^r b(s)ds) [\|V_1 - V_2\| \int_{-\infty}^r \|C(r,s)\| ds \\ &\quad + \|g(r, V_1(r)) - g(r, V_2(r))\|] dr \\ &\leq \int_t^{+\infty} \exp(-\int_t^r b(s)ds) [\|V_1 - V_2\| \cdot b(r)/k + \epsilon a/4\beta] dr \\ &\leq \frac{\delta}{k} \int_t^{+\infty} \exp(-\int_t^r b(s)ds) b(r) dr + a\epsilon/4\beta \int_t^{+\infty} \exp(-a(r-t)) dr \\ &\leq \delta/k + \epsilon/4 \leq \epsilon/4 + \epsilon/4 < \epsilon, \end{aligned}$$

即当 $\|V_1 - V_2\| < \delta$ 时, 就有 $\|GV_1 - GV_2\| < \epsilon$. 因此, $G: D_N \rightarrow D_N$ 是连续的.

由此可知, $G: D_N \rightarrow D_N$ 为全连续算子, 故由 Schauder 不动点定理知 G 在 D_N 上至少有一个不动点. 从方程(8)~(10)易知这个不动点就是方程(2)的 T -周期解. 定理 2 证毕.

参 考 文 献

- 1 黄启昌. 具无限时滞的泛函数微分方程的周期解的存在性. 中国科学(A辑), 1984, (10): 882~889
- 2 李森林, 温立志. 泛函微分方程. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1987. 465~471

Existence and Uniqueness of Periodic Solution to the Integro-Differential Equation with Infinite Time-Lag

Wang Quanyi

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract A study is made on the periodic solution to the integro-differential equation with infinite time-lag, some new results in relation to its existence and uniqueness have been obtained.

Keywords integro-differential equation, infinite time-lag, periodic solution, existence, uniqueness