

各向异性电介质中静电势的解*

苏武浔 魏腾雄 陈燊年

(华侨大学电子工程系, 泉州 362011)

摘要 从各向异性电介质中静电场基本方程组出发, 导出各向异性静电势的微分方程, 使用一种简单直观的解法而得各向异性静电势的普遍公式, 并通过实例说明其应用.

关键词 静电势, 各向异性, 普遍公式

分类号 TM 153

本文是网络现代场论^[1~2]对各向异性介质中电磁关系的系列研究之一. 在前述工作^[3~8]的基础上, 着重研究在各向异性电介质中静电场的一个基本问题. 即在各向异性电介质中, 静电势所满足的微分方程和它的求解, 以及给定了一定的电荷分布如何求静电势等基本问题. 上述微分方程的推导及其解已见于文[5]中, 本文在此基础上再给出该方程一种简练的推导和一种新的求解方法. 该方法参照了各向同性介质中已知的静电势普遍公式, 将此形式推及到介质为各向异性情形并对其中所出现的新系数, 用受到必须满足微分方程的条件来待定. 因此求解过程比较简单直观, 且与文[8]中对各向异性磁矢势 A 的微分方程的求解方法相对应. 最后, 用实例说明从给定电荷分布如何求解各向异性静电势的方法.

1 电各向异性介质中静电势的微分方程

在各向异性均匀电介质中, 静电场的基本方程组为

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (2)$$

$$D_i = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ik} E_k, \quad (3)$$

如引入介电常数并矢

$$\epsilon\epsilon = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ik} e_i e_k, \quad (4)$$

则式(3)表为 $\mathbf{D} = \epsilon\epsilon \cdot \mathbf{E}$. 代入式(2)中, 再以式(1)代入, 便得在电各向异性介质中静电势 φ 所满足的微分方程 $\nabla \cdot (\epsilon\epsilon \cdot \nabla\varphi) = -\rho$. 展开后, 即是含系数的泊松方程

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ik} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_i \partial x_k} = -\rho(x). \quad (5)$$

当选取介电常数张量 $\epsilon\epsilon$ 的三个主轴为 x_1, x_2, x_3 轴时, 式(5)简化成

* 本文 1995-12-26 收到

$$\epsilon_{11} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_1^2} + \epsilon_{22} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_2^2} + \epsilon_{33} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_3^2} = -\rho(x). \quad (6)$$

2 求各向异性静电势微分方程的解

当 $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33}$ 时, 已知式(6)的解为 $\varphi(x) = (4\pi\epsilon)^{-1} \int \frac{\rho(x')}{R} dv'$. 由此推知, 当 $\epsilon_{11} \neq \epsilon_{22} \neq \epsilon_{33}$ 时, 可令方程式(6)的解有以下的形式

$$\varphi(x) = \frac{a}{4\pi} \int \frac{\rho(x') dv'}{(b_1 R_1^2 + b_2 R_2^2 + b_3 R_3^2)^{1/2}}, \quad (7)$$

式中 $R = x - x'$, $R_1 = x_1 - x'_1$, $R_2 = x_2 - x'_2$, $R_3 = x_3 - x'_3$, 且 a 和 $b_i (i=1, 2, 3)$ 为待定系数. 做坐标变换

$$\xi_i = \sqrt{b_i} x_i \quad (i=1, 2, 3), \quad (8)$$

并令 $r = \xi - \xi'$, 则式(6)和(7)分别表为

$$b_1 \epsilon_{11} \frac{\partial^2 \varphi(\xi)}{\partial \xi_1^2} + b_2 \epsilon_{22} \frac{\partial^2 \varphi(\xi)}{\partial \xi_2^2} + b_3 \epsilon_{33} \frac{\partial^2 \varphi(\xi)}{\partial \xi_3^2} = -\rho(\xi), \quad (9)$$

$$\varphi(\xi) = \frac{a}{4\pi} \int \frac{\rho(\xi') dv'}{(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^{1/2}}. \quad (10)$$

如令

$$b_i = \epsilon_{ii}^{-1} \quad (i=1, 2, 3), \quad (11)$$

则式(9)简化为

$$\frac{\partial^2 \varphi(\xi)}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi(\xi)}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi(\xi)}{\partial \xi_3^2} = -\rho(\xi), \quad (12)$$

对式(10)求出偏导为 $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial r_i} \frac{\partial r_i}{\partial \xi_i} = -\left(\frac{a}{4\pi}\right) \int (r_i/r^3) \rho(\xi') dv'$, 代入式(12)中得

$$\rho(\xi) = \frac{a}{4\pi} \sum_{i=1}^3 \int \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{r_i}{r^3} \right) \rho(\xi') dv' = \frac{a}{4\pi} \int (\nabla_\xi \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}) \rho(\xi') dv', \quad (13)$$

式中 ∇_ξ 在坐标系 ξ_1, ξ_2, ξ_3 中的哈密顿算符 $\nabla_\xi = \mathbf{e}_1 \partial / \partial \xi_1 + \mathbf{e}_2 \partial / \partial \xi_2 + \mathbf{e}_3 \partial / \partial \xi_3$, 并按式(8)和(11)有

$$dv' = dx'_1 dx'_2 dx'_3 = \sqrt{\epsilon_{11} \epsilon_{22} \epsilon_{33}} d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi'_3. \quad (14)$$

把式(14)代入式(13), 得

$$\rho(\xi) = \frac{a}{4\pi} \sqrt{\epsilon_{11} \epsilon_{22} \epsilon_{33}} \int (\nabla_\xi \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}) \rho(\xi') d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi'_3, \quad (15)$$

在 $r \neq 0$ 的场合, 即 $\xi - \xi' \neq 0$, 在非源点, 因 $\nabla_\xi \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$, 式(15)两边恒等. 在 $r = 0$ 时, 取一无穷小的球面包围 ξ 点, 可取积分号内的 $\rho(\xi') = \rho(\xi)$, 并有 $\oint \nabla_\xi \cdot (\mathbf{r}/r^3) d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi'_3 = 4\pi$, 所以, 由式(15)两边恒等, 定出最后一个系数

$$a = (\epsilon_{11} \epsilon_{22} \epsilon_{33})^{-1}. \quad (16)$$

把式(11)和(16)代入式(7)中, 便得到各向异性静电势微分方程式(6)的解答为

$$\varphi(x) = (4\pi \sqrt{\epsilon_{11} \epsilon_{22} \epsilon_{33}})^{-1} \int \frac{\rho(x') dv'}{(R_1^2/\epsilon_{11} + R_2^2/\epsilon_{22} + R_3^2/\epsilon_{33})^{1/2}}. \quad (17)$$

如以式(14)和(16)代入式(10)中,则得各向异性静电势在 ξ_1, ξ_2, ξ_3 坐标系中的形式

$$\varphi(\xi) = (4\pi)^{-1} \int \frac{\rho(\xi') d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi'_3}{r} \quad (18)$$

当介质常数张量 ϵ_{ij} 的三个主轴不为 x_1, x_2, x_3 轴时,易由式(17)推广得

$$\varphi(x) = (4\pi \sqrt{|\epsilon_{ij}|})^{-1} \int \frac{\rho(x') dv'}{(\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ik}^{-1} R_i R_k)^{1/2}}, \quad (19)$$

式中 $|\epsilon_{ij}|$ 是张量 ϵ_{ij} 的行列式. 以上三式可称为在各向异性电介质中静电势的普遍公式.

3 举例

例 1 均匀带电的无限长直导线的电荷线密度为 τ , 求在均匀各向异性电介质中的电势.

选用在 ξ_1, ξ_2, ξ_3 坐标系中求解(图 1), 并取 ξ_1, ξ_2, ξ_3 三轴与 ϵ_{ij} 的三个主轴一致. 设无限长直导线与 ξ_3 轴重合, 在 ξ_1 - ξ_2 平面内任取一点 P 为观察点, 它到导线垂直距离为 D . 由式(18)得

$$\begin{aligned} \varphi_p &= (4\pi \sqrt{\epsilon_{11}\epsilon_{22}})^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho dx'_1 dx'_2 d\xi'_3}{r} \\ &= (4\pi \sqrt{\epsilon_{11}\epsilon_{22}})^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau d\xi'_3}{\sqrt{\xi_3^2 + D^2}} \\ &= (\tau 4\pi \sqrt{\epsilon_{11}\epsilon_{22}})^{-1} \ln(\xi_3 + \sqrt{\xi_3^2 + D^2}) \Big|_{-\infty}^{+\infty}, \end{aligned}$$

其积分结果是无穷大. 为避免此问题, 计算两点 P 和 P_0 的电势差, 设 P_0 点到导线的垂直距离为 D_0 , 则

$$\varphi_p - \varphi_{p_0} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\tau}{4\pi \sqrt{\epsilon_{11}\epsilon_{22}}} \ln \frac{\xi_3 + \sqrt{\xi_3^2 + D^2}}{\xi_3 + \sqrt{\xi_3^2 + D_0^2}} \Big|_{-M}^{+M} = \frac{-\tau}{2\pi \sqrt{\epsilon_{11}\epsilon_{22}}} \ln \frac{D}{D_0}.$$

若选 P_0 为参考点, 规定 $\varphi(p_0) = 0$, 则所求为 $\varphi_p = -\tau \ln(D/D_0)/2\pi(\epsilon_{11}\epsilon_{22})^{1/2}$, 变换回原来 x_1, x_2, x_3 坐标系中, 得

$$\varphi_p = -\frac{\tau}{4\pi \sqrt{\epsilon_{11}\epsilon_{22}}} \ln \frac{x_1^2/\epsilon_{11} + x_2^2/\epsilon_{22}}{x_{10}^2/\epsilon_{11} + x_{20}^2/\epsilon_{22}}.$$

例 2 当电介质为单轴晶体时, 计算一个均匀带电圆环在轴线上一点的静电势(图 2).

选用在 x_1, x_2, x_3 坐标系中求解, 并取 x_1, x_2, x_3 轴与 ϵ_{ij} 的三个主轴一致. 设 q 均匀分布在直径为 a 的圆环上, 位于 x_1, x_2 平面上, 则对单轴晶体有 $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} \neq \epsilon_{33}$, 因而 $R_1^2/\epsilon_{11} + R_2^2/\epsilon_{22} + R_3^2/\epsilon_{33} = a^2/\epsilon_{11} + R_3^2/\epsilon_{33} = \text{恒量}$, 代入式(17)得所求为

$$\varphi(P) = \frac{\tau}{4\pi \sqrt{\epsilon_{11}\epsilon_{22}\epsilon_{33}}} \int_0^{2\pi} a d\theta = \frac{q}{4\pi \sqrt{\epsilon_{11}\epsilon_{22}\epsilon_{33}}} (a^2/\epsilon_{11} + R_3^2/\epsilon_{33})^{1/2}.$$

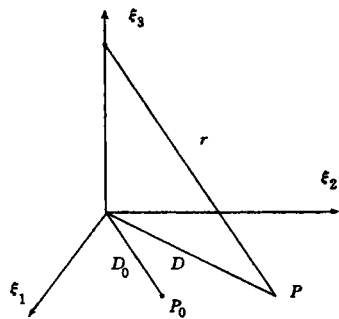


图1 无限长线电荷的势

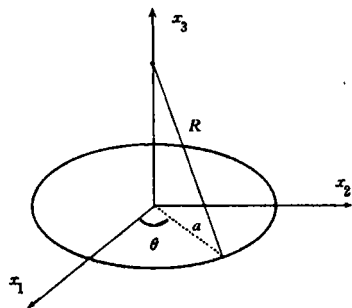


图2 带电圆环在单轴晶体的势

例3 计算均匀带电圆盘在单轴晶体介质中其轴线上一点的静电势.

选用与上题同样的坐标系和取向. 把圆盘看成是由一个个圆环组成, 则对半径为 r 处、宽度为 dr 、面电荷密度为 σ 的圆环, 在轴上 R_3 的点 p 产生的静电势, 由例2结果得

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= \int_0^a \frac{2\pi\sigma r dr}{4\pi\epsilon_{11} \sqrt{\epsilon_{33} (r^2/\epsilon_{11} + R_3^2/\epsilon_{33})^{1/2}}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_{11} \sqrt{\epsilon_{33}}} \left(\frac{r^2}{\epsilon_{11}} + \frac{R_3^2}{\epsilon_{33}} \right)^{1/2} \Big|_0^a \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_{11} \sqrt{\epsilon_{33}}} \left[\left(\frac{a^2}{\epsilon_{11}} + \frac{R_3^2}{\epsilon_{33}} \right)^{1/2} - \frac{R_3}{\sqrt{\epsilon_{33}}} \right].\end{aligned}$$

当 $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \epsilon$ 时, 得 $\varphi(P) = (\frac{\sigma}{2\epsilon})(\sqrt{a^2 + R_3^2} - R_3)$, 正是所预期的结果.

参 考 文 献

- 1 陈荣年, 何煜光, 陈 洁. 网络现代场论. 北京, 电子工业出版社, 1991. 177~222
- 2 陈荣年, 何煜光. 非线性网络与线性网络统一的场论说. 中国科学(A辑), 1994, 24(12): 1 316~1 326
- 3 陈荣年, 陈 洁. 各向异性磁介质的电感新公式. 电子科学学刊, 1991, 13(2): 157~168
- 4 王建成, 陈荣年. 磁各向异性的毕奥-萨伐尔定律及其应用. 华侨大学学报(自然科学版), 1989, 10(2): 125~132
- 5 郭震宁, 陈荣年. 在各向异性介质中电势的多极矩展开. 华侨大学学报(自然科学版), 1993, 14(4): 440~446
- 6 郭震宁, 陈荣年, 林文枝. 带电椭球在各向异性介质中的静电势. 华侨大学学报(自然科学版), 1994, 15(2): 163~167
- 7 朗道 Л. Д., 栗弗西兹 Е. М. 著. 连续媒质电动力学, 上册. 周 奇译. 北京: 人民教育出版社, 1963. 88~90
- 8 陈荣年, 王建成. 各向异性磁矢势 A 的微分方程及其解. 华侨大学学报(自然科学版), 1996, 17(1): 90~97

Differential Equations of Electrostatic Potential in Anisotropic Dielectric and Its Solution

Su Wuxun Wei Tengxiong Chen Shennian

(Dept. of Electron. Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract Starting from the basic equation of electrostatic field in anisotropic dielectric, differential equation of anisotropic electrostatic potential is derived. A general formula of anisotropic electrostatic potential is thus obtained from a simple and directly perceived solution and its application is exemplified.

Keywords electrostatic potential, anisotropy, general formula