

# 多层框架动力优化\*

欧阳义为 王全凤

(华侨大学土木工程系, 泉州 362011)

**摘要** 在考虑框架动力特性的基础上, 将框架跨度与梁、柱刚度作为设计变量, 且约束条件全面考虑了应力、位移、频率和尺寸约束. 最后得出在本文条件下, 多层框架动力优化计算中框架跨度只需取其下限值的结论.

**关键词** 跨度, 动力优化, 约束条件

**分类号** TU 311.3; TB 114.1

结构动力优化是结构优化中较新的研究领域. 1965年, Niordson 提出了该领域的第一篇论文, 实际工程的需要促使其迅速地发展. 结构动力优化的基本概念和方法与受静力荷载的结构优化设计基本相同, 它们的区别就在于结构动力优化必须考虑结构动力特性和结构动力反应. 从目前发表的论文<sup>[1~2]</sup>来看, 动力优化主要考虑框架柱的刚度优化, 而且框架大多在两层以下. 在约束条件中没有完全考虑应力、位移、频率和尺寸约束. 为此, 本文提出一种考虑跨度的多层框架动力优化方法. 该方法以框架重量最轻为目标函数, 框架跨度与梁、柱刚度为设计变量, 约束条件包含了应力、位移、频率以及尺寸约束. 优化方法采用 Lemke 方法求解序列二次规划, 并推导出相应的动力灵敏度公式. 结果表明, 该方法收敛速度快, 且效率高.

## 1 数学模型的建立

如图1所示多层单跨框架, 其重量集中在楼层上, 受地震、对称恒载和活载作用.

### 1.1 设计变量

各层层高由使用要求决定, 考虑到结构和荷载的对称性, 每层取1根柱、梁刚度的倒数  $I^{-1}$  及跨度的倒数  $l_{N+1}^{-1}$  作为设计变量. 对于  $n$  层框架, 设计变量共有  $2N+1$  个, 因此有  $x_i = I_i^{-1} (i=1, 2, \dots, 2N)$ ,  $x_{2N+1} = l_{N+1}^{-1}$ .

### 1.2 目标函数

若取框架结构的自重最轻为目标函数, 则框架自重为  $W = 2 \sum_{i=1}^N r l_i A_i + \sum_{i=N+1}^{2N} r l_{N+1} A_i$ , 式中  $r$  为容重;  $l_i$  为各杆长度;  $A_i$  为各杆的断面积. 因  $A = aI$ , 对于矩形截面,  $a = \frac{12}{h^2}$ , 故  $W = 2 \sum_{i=1}^N r l_i a_i x_i^{-1} +$

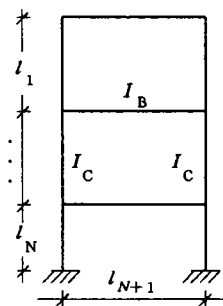


图1 框架模型图

\* 本文 1995-12-18 收到, 福建省自然科学基金资助项目

$$\sum_{i=N+1}^{2N} r x_{2N+1}^{-1} a_i x_i^{-1}.$$

### 1.3 约束函数

1.3.1 应力约束  $\sigma_{\max i} \leq \sigma_i (i=1, 2, \dots, 2N)$ , 式中  $\sigma_{\max i}$  为各杆件的最大应力,  $\sigma_i$  为各杆件的应力限值.

1.3.2 位移约束 位移约束由框架层间相对位移和顶层最大位移控制, 则  $U_{\max i} \leq U_i (i=1, 2, \dots, N)$ ;  $U_{\max} \leq U$ . 式中  $U_{\max i}$  和  $U_{\max}$  分别为层间相对位移和顶层位移的最大值,  $U_i$  和  $U$  分别为层间相对位移和顶层位移的限值.

1.3.3 频率约束  $\omega_1 \geq \bar{\omega}_1$ , 式中  $\omega_1$  和  $\bar{\omega}_1$  分别为框架第一频率及其限值.

1.3.4 尺寸约束  $0 \leq x_i \leq X_i (i=1, 2, \dots, 2N+1)$ , 式中  $x_i$  和  $X_i$  各为设计变量值及上限值.

### 1.4 优化问题的提出及其求解方法

由以上分析可提出如下优化问题, 即求  $x_i (i=1, 2, \dots, 2N+1)$ , 使目标函数  $W = 2 \sum_{i=1}^N r l_i a_i x_i^{-1} + \sum_{i=N+1}^{2N} r x_{2N+1}^{-1} a_i x_i^{-1}$  最小. 其约束条件为  $\sigma_{\max i} \leq \sigma_i (i=1, 2, \dots, 2N)$ ;  $U_{\max i} \leq U_i, U_{\max} \leq U (i=1, 2, \dots, N)$ ,  $\omega_1 \geq \bar{\omega}_1$ ;  $0 \leq x_i \leq X_i (i=1, 2, \dots, 2N+1)$ .

### 1.5 求解方法

本文求解方法的基本步骤: (1) 给定初始方案; (2) 进行结构分析和优化分析; (3) 检查优化结果是否满足收敛标准. 若满足, 则优化结束, 输出优化结果; 若不满足, 则以优化结果的变量值代替初始值, 返回第二步; 如此反复进行, 直至满足收敛标准为止.

结构计算为优化计算提供各杆件的内力值、频率和位移等必要数据. 根据本文的需要, 我们用有限元法开发了一套相应的结构计算程序, 限于篇幅, 这里不再赘述.

## 2 优化分析

本文将动力优化问题转化为序列二次规划问题(SQP). 首先建立它的库恩-塔克条件, 并把原变量的序列二次规划问题转化为以拉格朗日乘子为变量的线性互补问题, 这样便可用 Lemke 方法求解.

### 2.1 目标函数的二次展开式

序列二次规划将目标函数  $W$  在当前设计变量  $x_{i0}$  处按泰勒公式二次展开, 并省去常数项, 则可得  $W(x) = \frac{1}{2} X^T P X + b^T X$ , 式中  $P = \nabla^2 W|_{x_i=x_{i0}}, b = \nabla W|_{x_i=x_{i0}} - \nabla^2 W|_{x_i=x_{i0}} \cdot x_{i0}$ .

### 2.2 应力约束

$\sigma_{\max i} = \frac{M_{i0}}{S_i(I)} + \frac{N_{i0}}{A_i(I)} (i=1, 2, \dots, 2N)$ , 式中  $M_{i0}, N_{i0}$  为当前设计变量得到的第  $i$  个单元的最大弯矩值和对应的轴力值. 由  $A=aI, S=cI$  (对于矩形截面,  $a=\frac{l^2}{h^2}, c=\frac{2}{h}$ ), 可得  $\sigma_{\max i} = \frac{M_{i0}}{c_i I_i} + \frac{N_{i0}}{a_i I_i} = (\frac{M_{i0}}{c_i} + \frac{N_{i0}}{a_i}) x_i$ . 设  $S = \frac{M_{i0}}{c_i} + \frac{N_{i0}}{a_i}$ , 则  $S X \leq \sigma_i$ , 式中  $S$  为

$$S = \begin{bmatrix} \frac{M_{i0}}{c_i} + \frac{N_{i0}}{a_i} & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \frac{M_{N0}}{c_N} + \frac{N_{N0}}{a_N} & 0 \end{bmatrix}_{2N \times 2N}$$

2.3 位移约束

如图 2 所示,将多层单跨框架等效为多层半框架. 此框架的  $i_c' = \sum i_c = 2i_c, i_b' = 4\sum i_b = 4i_b$ . 由  $D$  值法可知,  $U_N = \frac{Q_N}{D_N}, D_N = \alpha i_c \frac{l^2}{n^2}$ , 对于上部各层,  $\alpha = \frac{\bar{i}}{(2+\bar{i})}$ ; 对于最下层,  $\alpha = \frac{(0.5+\bar{i})}{(2+\bar{i})}, \bar{i} = \frac{i_b'}{i_c'} = \frac{4i_b}{2i_c} = \frac{2i_b}{i_c}$ , 其中  $Q_N$  为第  $N$  层的层剪力,  $U_N$  为层间相对侧移,  $D_N$  为半框架第  $N$  层柱侧移刚度.

对于上部各层,  $u_i = \frac{Q_i}{\alpha i_c \frac{12}{h^2}} = (x_i l_i^3 + x_{2N+1}^{-1} x_{N+1} l_i^2) \frac{Q_i}{24E}$ ;

而对于最下层,  $U_N = \frac{Q_i}{\alpha i_c \frac{12}{h^2}} = (x_N l_N^3 + \frac{3l_N^3}{x_N^{-1} + 4l_N x_{2N+1} x_{2N}^{-1}})$

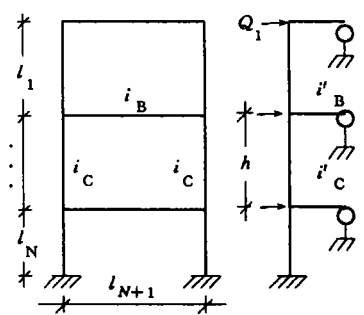


图2 多层框架等效为多层半框架

$\frac{Q_N}{24E}$ ; 顶层最大位移为  $U_{\max} = u_1 + u_2 + \dots + u_N$ . 根据泰勒公式将位移表达式在当前设计点  $x_{i_0}$  处展开并保留一阶项, 移项可得

$$\nabla U|_{x_i=x_{i_0}} \cdot x_i \leq U_i - U(x_{i_0}) + \nabla U|_{x_i=x_{i_0}} \cdot x_{i_0}.$$

设  $H = \nabla U|_{x_i=x_{i_0}}, F = U_i - U + \nabla U|_{x_i=x_{i_0}} \cdot x_{i_0}$ , 则上式化为  $HX \leq F$ .

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial u_1}{\partial x_{N+1}} & 0 & \frac{\partial u_1}{\partial x_{2N+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{\partial u_N}{\partial x_N} & 0 & \frac{\partial u_N}{\partial x_{2N}} & \frac{\partial u_N}{\partial x_{2N+1}} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_N}{\partial x_N} & \frac{\partial u_1}{\partial x_{N+1}} & \frac{\partial u_N}{\partial x_{2N}} & \frac{\partial u_{\max}}{\partial x_{2N+1}} \end{bmatrix}_{(N+1) \times (2N+1)}$$

式中  $\frac{\partial u_{\max}}{\partial x_{2N+1}} = (\frac{\partial u_1}{\partial x_{2N+1}} + \dots + \frac{\partial u_N}{\partial x_{2N+1}})$ .

2.4 频率约束

结构的主振型方程为  $(K - \lambda M)Y = 0$ , 对  $x_i$  求偏导, 可得

$$\frac{\partial K}{\partial x_i} Y + K \frac{\partial Y}{\partial x_i} - \frac{\partial M}{\partial x_i} Y - \lambda \frac{\partial M}{\partial x_i} Y - \lambda M \frac{\partial Y}{\partial x_i} = 0,$$

将上式前乘  $Y^T$ , 得

$$Y^T \frac{\partial K}{\partial x_i} Y - \lambda Y^T \frac{\partial M}{\partial x_i} Y - Y^T M Y \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + (Y^T K \frac{\partial Y}{\partial x_i} - \lambda Y^T M \frac{\partial Y}{\partial x_i}) = 0,$$

将  $Y^T K = \lambda Y^T M$  代入上式, 移项得

$$\partial \lambda / \partial x_i = (Y^T \frac{\partial K}{\partial x_i} Y - \lambda Y^T \frac{\partial M}{\partial x_i} Y) / Y^T M Y.$$

将频率表达式按泰勒公式在当前设计点  $x_{i_0}$  处展开并保留一阶项, 移项可得

$$\nabla \lambda|_{x_i=x_{i_0}} \cdot x_i \geq \lambda - \lambda(x_{i_0}) + \nabla \lambda|_{x_i=x_{i_0}} \cdot x_{i_0}.$$

设  $\nabla \lambda|_{x_i=x_{i_0}} = D, \lambda - \lambda(x_{i_0}) + \nabla \lambda|_{x_i=x_{i_0}} \cdot x_{i_0} = E$ , 则

$$-DX \leq -E.$$

## 2.5 序列二次规划的求解

将上述各约束表达式合并在一起,可得到如下序列二次规划,即使  $\frac{1}{2}X^T P X + b^T X$  最小,其约束条件为

$$BX \leq C. \quad (1)$$

$X \geq 0$ , 式(1)表达式为

$$\begin{bmatrix} S_{2N \times 2N} \\ H_{(N+1) \times (2N+1)} \\ -D_{1 \times (2N+1)} \\ I_{(2N+1) \times (2N+1)} \end{bmatrix}_{(5N+3) \times (2N+1)} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \\ x_{N+1} \\ \vdots \\ x_{2N} \\ x_{2N+1} \end{Bmatrix} \leq \begin{Bmatrix} \sigma \\ F \\ -E \\ X \end{Bmatrix}_{(5N+3) \times 1},$$

式中  $I$  是单位矩阵. 对于上述标准形式的二次规划, 我们可建立它的库恩-塔克条件, 并将求原二次规划问题转化为求满足库恩-塔克条件的点, 即求  $W$  和  $Z$ , 使得

$$\begin{cases} IW - QZ = R, \\ W^T Z = 0 \quad (W \geq 0, Z \geq 0), \end{cases} \quad (2)$$

其中  $I$  是单位矩阵, 列向量  $W, Z, R$  和矩阵  $Q$  分别为

$$W = \begin{Bmatrix} V \\ U \end{Bmatrix}, \quad Z = \begin{Bmatrix} \lambda \\ X \end{Bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} O & -B \\ B^T & P \end{bmatrix}, \quad R = \begin{Bmatrix} b \\ c \end{Bmatrix},$$

式中  $U$  为和  $X \geq 0$  相应的拉格朗日乘子;  $V$  为松弛变量组成的向量, 即  $BX - C + V = 0$ ;  $\lambda$  为和  $BX \leq C$  相应的拉格朗日乘子组成的向量. 式(2)称为线性互补问题. 本文采用 Lemke 方法<sup>[2]</sup>求解, 收敛速度快, 结果也令人满意.

## 3 算例及其分析

### 3.1 算例

如图3所示的3层单跨框架为七度抗震设防, III类场地土, 近震. 初始柱断面均取  $0.4 \text{ m} \times 0.4 \text{ m}$ , 梁断面均取  $0.3 \text{ m} \times 0.5 \text{ m}$ , 混凝土强度等级 C20, 用 I 级钢, 应力上限值为  $1.10 \times 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-2}$ , 柱惯性矩都为  $3.0 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ , 梁惯性矩都为  $1.78 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ .

(1) 情况 A. 层间位移上限值  $U_-, I$  都为  $5.6 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ , 顶层最大位移  $TU_- = 1.8 \times 10^{-2} \text{ m}$ , 频率下限值  $\bar{\omega}_- = 0.33 \text{ s}^{-1}$ .

(2) 情况 B.  $U_-, I$  都为  $4.5 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ ,  $TU_- = 1.8 \times 10^{-2} \text{ m}$ ,  $\bar{\omega}_- = 14.14 \text{ s}^{-1}$ , 跨度  $X_- = 0.25 \text{ m}^{-1}$ .

(3) 情况 C.  $U_-, I$  都为  $6.6 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ ,  $TU_- = 1.6 \times 10^{-2} \text{ m}$ ,  $\bar{\omega}_- = 10.00 \text{ s}^{-1}$ , 跨度  $X_- = 0.182 \text{ m}^{-1}$ . 计算结果见附表.

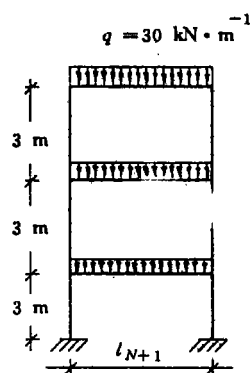


图3 框架受力简图

附表 算例优化结果<sup>①</sup>

情 况	楼 层	$I_{柱} \times 10^{-3}$ /m <sup>4</sup>	$I_{梁} \times 10^{-3}$ /m <sup>4</sup>	$\sigma_{柱} \times 10^4$ /kN · m <sup>-2</sup>	$\sigma_{梁} \times 10^4$ /kN · m <sup>-2</sup>	$U \times 10^{-3}$ /m	$TU \times 10^{-3}$ /m	$\omega$ /s <sup>-1</sup>	$W$ /kN	$X_{-}$ /m <sup>-1</sup>	迭 代 次 数
A	1	0.41	0.56	1.10	0.85	4.86					
	2	0.59	1.03	1.07	1.06	4.75	12.47	12.65	0.62	3.00	9
	3	0.89	1.64	1.04	0.90	2.87					
B	1	0.94	0.97	1.10	1.04	4.45					
	2	1.13	2.07	1.10	1.10	4.16	11.18	12.24	0.87	4.00	6
	3	1.74	2.51	1.10	1.03	2.57					
C	1	2.26	2.17	1.10	1.10	3.93					
	2	2.28	4.31	1.10	1.10	3.89	10.11	15.63	1.28	5.50	6
	3	3.54	4.66	1.10	1.10	2.29					

① 文中楼层编号均从上向下

### 3.2 算例分析

首先,情况 A 起控制作用的是频率约束;情况 B 起控制作用的是应力、位移和频率约束;而情况 C 则是应力约束. 从迭代次数来看,收敛速度很快,最多次数不超过 9 次.

其次,在 3 种情况下,跨度都取下限值,也即跨度是由尺寸约束确定的. 另外,采用我们编制的程序计算了大量算例,结果亦如此. 所以,可以作出以下结论:在本文多层框架的动力优化中,可不把跨度看作参与优化的设计变量,在跨度的选取上,只考虑其下限值.

再者,在多层框架动力优化中,什么约束起控制作用是不确定的. 可能是一种约束起作用;也可能是几种约束起作用. 所以,在动力优化中,缺少其中任何一种约束都无法完整地反映动力优化的特性.

### 参 考 文 献

- 1 董明耀. 抗震结构的优化设计. 哈尔滨建筑工程学院学报,1986,(2):42~57
- 2 程耿东. 工程结构优化设计基础. 北京:水利电力出版社,1984. 235~248

## Dynamic Optimization of Multistoried Framework

Ouyang Yiwei Wang Quanfeng

(Dept. of Civil Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

**Abstract** Based on the dynamic property of framework, a dynamic optimized calculation of multistoried framewouk is made with the span of framework and stif fness of beams and columns as design variable, and with stress,displacement, frequency and size constraints as constrained conditions. The calculation made under the above conditions leads to the conclusion that only lower limit is demanded for the span of framewouk.

**Keywords** span, dynamic optimization, constrained condition