

部分预应力砼连续梁的弯矩-曲率分析法*

方德平 林雨生

(华侨大学土木工程系, 泉州 362011)

摘要 推导普遍适用的部分预应力砼梁截面的弯矩-轴力-曲率的关系。基于砼、预应力筋和非预应力筋的应力-应变关系的非线性和超静定结构的次弯矩, 计算不同配筋的边跨梁和中跨梁。计算结果表明, 配筋指标在 0.1~0.25 范围内, 梁具有良好的延性和承载能力; 提高有效预应力和相应减小预应力筋面积, 能提高梁的延性。

关键词 部分预应力混凝土, 连续梁, 弯矩, 曲率, 非线性, 次弯矩, 延性

分类号 TU 378. 201

随着生产的持续发展和工艺的不断更新, 越来越多地要求建筑结构采用大跨度和大开间的形式和体系。近十几年, 部分预应力混凝土(PPC)连续梁的结构体系得到了广泛的应用。这种结构, 由于预应力在控制截面产生的消压弯矩小于使用弯矩, 即预应力度小于 1, 因此, 它们在使用阶段处于非线性工作状态。为了能够根据结构的实际受力状态设计 PPC 连续梁, 进行非线性分析成为国内外的重要研究课题^[1]。然而, 迄今为止, 研究尚有待深入。因此, 本文的研究仅限于静力分析, 即对 PPC 连续梁进行单调加载直至破坏的非线性分析。文中所考虑的非线性因素有以下 2 个方面: (1) 结构材料的非线性; (2) 预应力在结构中所产生的次内力而引起的非线性。部分预应力梁具有在短期荷载下开裂、长期荷载下裂缝闭合的特性, 即存在残余应变等问题^[2], 本文未考虑这些因素的影响。

1 基本假设

下面为基本假设。

- (1) 杆件截面在受力前后, 其变形服从平截面假定。
- (2) 预应力筋、非预应力筋与砼的粘结良好。
- (3) 在预应力单独作用下或砼开裂前, 结构处于线弹性工作状态。
- (4) 砼的应力-应变关系取用规范 GBJ 10-89 的理论曲线, 如图 1 所示。即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_c &= f_c [2\epsilon_c/\epsilon_0 - (\epsilon_c/\epsilon_0)^2] & 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_0, \\ \sigma_c &= f_c & \epsilon_0 < \epsilon_c \leq \epsilon_{cu}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 f_c 为砼弯曲抗压强度; σ_c 和 ϵ_c 为砼的应力和应变; $\epsilon_0 = 0.002$, $\epsilon_{cu} = 0.0033$ 。

* 本文 1995-12-31 收到

(5) 非预应力钢筋为理想弹塑性材料,其应力-应变关系为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= E_s \epsilon_s & \epsilon_s &\leq \epsilon_y, \\ \sigma_s &= f_s & \epsilon_s &> \epsilon_y, \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

式中 σ_s 和 ϵ_s 为其应力和应变; f_s 为其抗拉强度; E_s 为其弹性模量; ϵ_y 为其屈服应变, $\epsilon_y = f_s / E_s$. 这里忽略受压钢筋的影响.

(6) 预应力筋的应力-应变关系如图 2 所示. 图 2 中 σ_p 和 ϵ_p 为其应力和应变; σ_e 和 ϵ_e 为

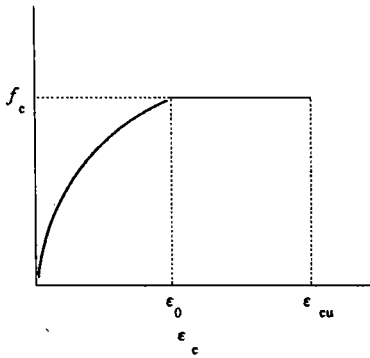


图1 砼的应力-应变关系

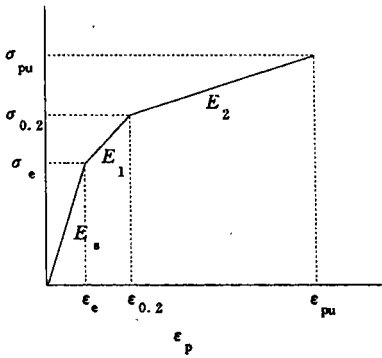


图2 预应力筋的应力-应变关系

其应力和应变的弹性极限; $\sigma_{0.2}$ 和 $\epsilon_{0.2}$ 为其条件屈服强度和相应的应变; σ_{pu} 和 ϵ_{pu} 为其抗拉强度和相应的应变; E_s, E_1, E_2 为 3 段的弹性模量.

2 截面的弯矩-轴力-曲率关系^[2]

当截面承受的弯矩小于截面的开裂弯矩时,其弯矩-轴力-曲率($M-N-\phi$)关系与轴力 N 无关,据基本假设易求解,这里不赘述. 截面开裂以后, $M-N-\phi$ 关系变得较为复杂,经反复探索,本文提出下述计算精度较好、计算过程简捷和收敛速度较快的计算方法.

在图 3 中,矩形截面宽及高分别为 b 和 h ; 预应力筋面积为 A_p , 离受压边缘距离为 h_p ; 非预

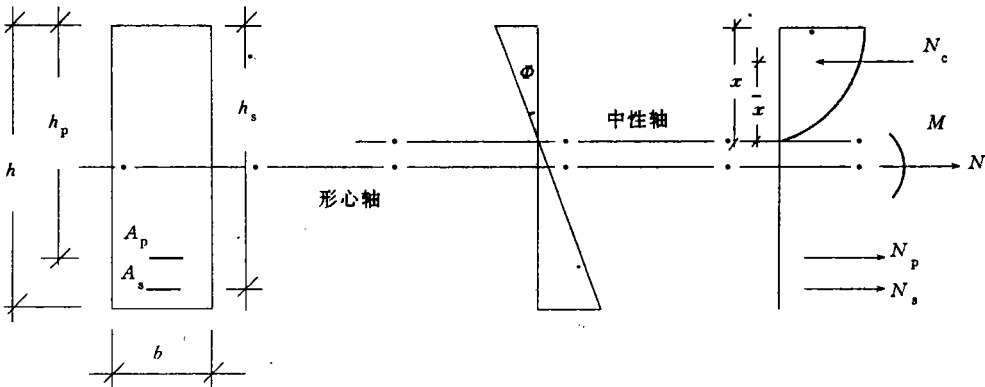


图3 开裂截面的应变及内力

应力筋面积 A_s , 离受压边缘距离为 h_s , 不计受压钢筋的作用; 砼受压区高度为 x , 其合力点至中性轴的距离为 \bar{x} , 不计开裂截面砼的抗拉强度; 砼、非预应力筋和预应力筋的合力分别为 N_c, N_s, N_p ; 截面承受的弯矩和轴力分别为 M 和 N , 截面曲率 ϕ 以未受力状态为计算起点.

由弹性计算可得预应力筋处砼的应变为零时,预应力筋的应变 ϵ_{p0} 为

$$\epsilon_{p0} = \frac{N_{p0}}{E_s A_p} + \frac{N_{p0}}{E_c A} + \frac{N_{p0}(h_p - h/2)^2}{E_c I}, \quad (3)$$

式中 N_{p0} 为有效预拉力; E_c 为砼的弹性模量; A, I 分别为截面面积和惯性矩. 预应力筋的应变为

$$\epsilon_p = \varphi(h_p - x) + \epsilon_{p0}. \quad (4)$$

由(4)和图 2 的应力-应变关系,可得预应力筋承受的总拉力 N_p 为

$$N_p = C_1 + C_2(h_p - x)\varphi, \quad (5)$$

式中当 $\epsilon_p \leq \epsilon_e$ 时, $C_1 = \epsilon_{p0} E_s A_p$, $C_2 = E_s A_p$; 当 $\epsilon_e < \epsilon_p \leq \epsilon_{0.2}$ 时, $C_1 = [\sigma_e + (\epsilon_{p0} - \epsilon_e) E_1] A_p$, $C_2 = E_1 A_p$; 当 $\epsilon_{0.2} < \epsilon_p \leq \epsilon_{pu}$ 时, $C_1 = [\sigma_{0.2} + (\epsilon_{p0} - \epsilon_{0.2}) E_2] A_p$, $C_2 = E_2 A_p$. 非预应力筋的应变为

$$\epsilon_s = \varphi(h_s - x). \quad (6)$$

由(6)和式(2)的应力-应变关系,可得非预应力筋承受的拉力 N_s 为

$$N_s = D_1 + D_2(h_s - x)\varphi, \quad (7)$$

式中当钢筋未屈服时, $\epsilon_s \leq \epsilon_y$, $D_1 = 0$, $D_2 = E_s A_s$; 当钢筋已屈服时, $\epsilon_s > \epsilon_y$, $D_1 = f_s A_s$, $D_2 = 0$.

由于砼的应力-应变曲线为分段曲线,所以应划分 2 种情况($\varphi x \leq \epsilon_0$, $\epsilon_0 < \varphi x \leq \epsilon_{cu}$)来分析 $M-N-\varphi$ 关系. 下面分析第 1 种情况($\varphi x \leq \epsilon_0$),据砼的应力-应变关系,可得

$$N_c = f_c b x^2 \varphi / \epsilon_0 - f_c b x^3 \varphi^2 / 3 \epsilon_0^3, \quad (8)$$

$$N_c \bar{x} = 2 f_c b x^3 \varphi / 3 \epsilon_0 - f_c b x^4 \varphi^2 / 4 \epsilon_0^2. \quad (9)$$

由平衡关系得

$$f_c b x^2 \varphi / \epsilon_0 - f_c b x^3 \varphi^2 / 3 \epsilon_0^3 - C_1 - C_2(h_p - x)\varphi - D_1 - D_2(h_s - x)\varphi = -N, \quad (10)$$

$$2 f_c b x^3 \varphi / 3 \epsilon_0 - f_c b x^4 \varphi^2 / 4 \epsilon_0^2 + [C_1 + C_2(h_p - x)\varphi](h_p - x) + [D_1 + D_2(h_s - x)\varphi](h_s - x) = M + N(\frac{h}{2} - x). \quad (11)$$

第 2 种情况的分析与第 1 种相类似,其平衡关系为

$$f_c b x - \frac{1}{3} f_c b \frac{\epsilon_0}{\varphi} - C_1 - C_2(h_p - x)\varphi - D_1 - D_2(h_s - x)\varphi = -N, \quad (12)$$

$$\frac{1}{2} f_c b x^2 - \frac{1}{12} f_c b \frac{\epsilon_0^2}{\varphi^2} + [C_1 + C_2(h_p - x)\varphi](h_p - x) + [D_1 + D_2(h_s - x)\varphi](h_s - x) = M + N(h/2 - x). \quad (13)$$

下面为已知 M, N , 求 x, φ 的计算步骤.

(1) 依预应力筋和非预应力筋的各自受力,可分为如下 5 种状态:(a) $\epsilon_p \leq \epsilon_e, \epsilon_s \leq \epsilon_y$; (b) $\epsilon_e < \epsilon_p \leq \epsilon_{0.2}, \epsilon_s > \epsilon_y$; (c) $\epsilon_{0.2} < \epsilon_p \leq \epsilon_{pu}, \epsilon_s > \epsilon_y$; (d) $\epsilon_p \leq \epsilon_e, \epsilon_s > \epsilon_y$; (e) $\epsilon_e < \epsilon_p \leq \epsilon_{0.2}, \epsilon_s \leq \epsilon_y$. 依次对各种屈服状态进行以下计算.

(2) 求出在轴力 N 作用下,处于中间状态($\varphi x = \epsilon_0$)的 M_i ;依步骤(1)设定的屈服状态求出 C_1, C_2, D_1, D_2 ;将 $x = \epsilon_0 / \varphi$ 代入式(10),式(10)成为 φ 的二次方程,去除小于零的解,求得 φ ;将 φ 和 x 代入式(11),即可求得 M_i .

(3) 若 $M \leq M_i$,则为第 1 种情况,对不同的 x 值进行循环计算,由式(10)求出相应的 2 个

解 φ_1, φ_2 , 通过判别条件 $0 < \varphi x \leq \varepsilon_0$, 从中选择真解 φ_1 代入式(11), 直至式(11)成立(误差小于给定值), 求得 x, φ

(4) 若 $M > M_1$, 则为第2种情况, 判别条件为 $\varepsilon_0 < \varphi x \leq \varepsilon_{cu}$, 按步骤(3)的计算过程, 由式(12), (13)求得 x, φ

(5) 重复步骤(1), (2), (3), (4), 直至步骤(1)设定的屈服状态与由式(4), (6)计算所得的屈服状态相一致; 从而求出预应力筋和非预应力筋的应力。

本文的 $M-N-\varphi$ 关系的计算方法实现了梁、柱、预应力和普通砼截面的计算的统一。

3 计算步骤及算例

梁开裂后, 刚度沿杆长是变化的, 所以应划分足够多的单元来保证计算的精度, 特别在剪力值较大处, 更应如此。假设杆单元为等刚度单元, 并取用杆单元内最大弯矩处的刚度。如果采用增量法, 当预应力筋和非预应力筋屈服后, 截面的切线刚度很小, 易使总体刚度矩阵成为病态矩阵, 导致计算上的困难。所以, 本文采用全量法, 梁截面刚度取其割线刚度。作用在梁上的荷载由两部分组成: 一是由预应力引起的支座反力, 此反力在梁中产生次弯矩; 二是外荷载。本文把由预应力引起的支座反力当作一种外力(严格地说, 这不很正确, 外力能改变预应力筋应力, 而支座反力由预应力引起, 自然不能改变其应力, 但误差很小)。截面在轴力 N 作用下, $M-\varphi$ 的关系如图4所示($N=\text{常数}$)。取 O_1 为计算起点, 即此处未施加外荷载和次弯矩。下面是其计算步骤。

(1) 弹性计算由预应力产生的支座反力和相应的次弯矩 M_1 , 如图4中的 O_2 点; 并以 O_2 点为后续计算的起点。

(2) 按上一轮迭代循环的步骤(3)中的刚度值计算梁在外荷载作用下的内力 M_e 和位移。第1次迭代计算时, 单元刚度取其弹性值。

(3) 计算各个单元实际承受的最大弯矩 $M = M_e + M_1$ 和相应的轴力 N , 依 $M-N-\varphi$ 关系, 求出 φ 值, 如图4中 A 点, 新值的割线刚度为 O_2A 的斜率。在计算中, $M_e + M_1$ 可能超出

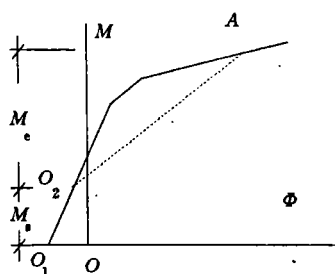


图4 梁的计算起点及新值刚度

其弯矩极限值, 无法求得 φ 值, 为使计算继续下去, 可取一较低的刚度值为其新值割线刚度。由于刚度与其弯矩相关, 若原刚度大, 弯矩大, 计算所得的 φ 值大, 则导致新值刚度小, 实际的刚度应介于二者之间。所以, 在原刚度与新值刚度之间选择适当的刚度值, 作为新一轮的计算刚度, 有助于计算的收敛。

(4) 重复得步骤(2), (3), 直至以下收敛条件得到满足, 即

$$\sum |K_i^{(N+1)} - K_i^{(N)}| / \sum |K_i^{(N+1)}| \leq S,$$

其中 $K_i^{(N+1)}, \sum K_i^{(N)}$ 各为第 $(N+1)$ 次和第 N 次迭代所得的第 i 杆单元刚度, S 为设定的精度。

(5) 计算梁的内力和位移; 预应力筋和非预应力筋的应力。连续梁的形式多种多样, 本文只分析其边跨和中跨, 边跨和中跨的计算简图如图5, 6所示。计算参数如下: 砼 $f_c = 35 \text{ MPa}$, $E_c = 3.45 \times 10^4 \text{ MPa}$; 非预应力筋 $f_s = 335 \text{ MPa}$; 预应力筋 $\sigma_s = 1200 \text{ MPa}$, $\sigma_{0.2} = 1465 \text{ MPa}$, $\sigma_{pe} = 1790 \text{ MPa}$, $E_s = 2.05 \times 10^5 \text{ MPa}$, $E_1 = 8.05 \times 10^4 \text{ MPa}$, $E_2 = 1.05 \times 10^4 \text{ MPa}$, 有效预应力 σ_{pe}

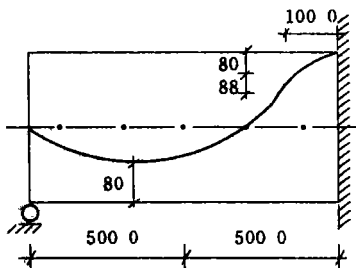


图5 边跨梁计算简图

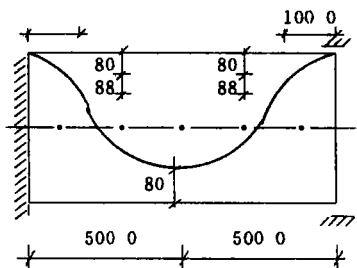


图6 中跨梁计算简图

$=900\text{ MPa}$;截面为 $0.3\text{ m}\times0.6\text{ m}$,钢筋离受压边距离 $h_s=0.55\text{ m}$;梁上作用均布荷载 q ,梁等分为 20 个单元,每个杆单元中,预应力筋离受压边距离 h_p 取单元内的最大值.配筋①中 $A_{st}=400\text{ mm}^2$, $A_{sm}=100\text{ mm}^2$, $A_p=250\text{ mm}^2$,其中 A_{st} 为固定端处的受拉筋面积, A_{sm} 为跨中和铰支座处的受拉筋面积;配筋①中的 A_{st} , A_{sm} , A_p 面积乘上 2 为配筋②,乘上 3 为配筋③.配筋①,②,③大致相当于低、中、高 3 种配筋;配筋 I 中的非预应力筋与配筋②相同, $A_p=450\text{ mm}^2$, $\sigma_{pe}=1\text{ }000\text{ MPa}$,保持总拉力不变,提高有效预应力,相应减小配筋②中的 A_p ;边跨梁与中跨梁的配筋相同.图 7 为不同配筋的中跨梁跨中挠度-外荷载关系曲线,边跨梁的挠度-外荷载关系曲线与图 7 相似,不另作图.附表为极限状态下梁的力学参数, f_m 为跨中的最大挠度; σ_{pt} 为固定端处预应力筋的应力, σ_{pm} 为跨中预应力筋的最大应力; M_m 为跨中最大弯矩, M_t 为固定端处弯矩(已计入次弯矩);在极限状态下,各种配筋的跨中、固定端处的非预应力筋均已屈服,理论的极限状态指的是梁中某单元的砼压应变为 ϵ_{cu} ,即 $\varphi x=\epsilon_{cu}$.从 M_t , M_m 来看,极限状态下,内力已重新分布,破坏从固定端处产生.

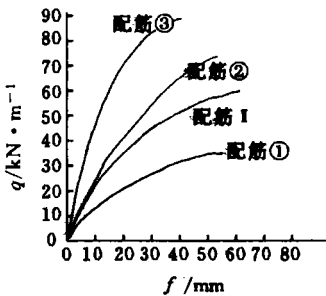


图7 不同配筋和中跨梁跨中挠度-外荷载关系曲线

附表 极限状态下梁的力学参数

梁 配筋	中 跨 梁				边 跨 梁		
	①	②	I	③	①	②	③
$q/\text{kN}\cdot\text{m}^{-1}$	37.4	67.5	64.1	92.5	26.1	47.4	64.5
f_m/mm	83	58.4	63.1	41.9	142.6	85	65.8
σ_{pt}/MPa	1 600	1 514	1 532	1 480	1 600	1 514	1 479
σ_{pm}/MPa	1 481	1 369	1 433	1 257	1 553	1 464	1 378
$M_m/\text{kN}\cdot\text{m}$	199.3	355.1	338.4	470.3	205.6	373.4	499.6
$M_t/\text{kN}\cdot\text{m}$	268.2	488.7	462.8	686	268.2	488.7	686

4 结论

(1) 在美国 ACI 规范中^[4],为了保证延性,规定配筋指标 $q\leq0.3(q=(A_p\sigma_p+A_s f_s)/bh_0 f_c)$, σ_p 为极限荷载下预应力筋的应力, h_0 为 N_s , N_p 合力点的高度).依中跨梁、边跨梁的计算结果,配筋①,②,③支座配筋指标 q 分别为 0.096,0.184,0.272;跨中的 q 分别为 0.073,0.135,0.187.为保证延性和具有相当的承载能力,对抗震等级为一级的结构,本文认为以中等配筋为

宜,合适值范围为 0.1~0.25;ACI 的规定 $q \leq 0.3$,这一范围略显偏大.

(2) 提高预拉应力,相应减小预应力筋面积,保持预拉力不变,能在一定程度上提高梁的延性,如配筋 I 的 f_m 比配筋②大 8%.

(3) 在极限状态下,即使在高配筋梁中,非预应力筋也能达到屈服强度.

本文为校科研基金资助项目.

参 考 文 献

- 1 Cohn M Z, Frostig Y. Inelastic behavior of continuous prestressed concrete beams. Journal of the Structural Division, 1983,109(10),171~194
- 2 林太珍. 高效预应力混凝土工程实践. 北京:中国建筑工业出版社,1993.139~146
- 3 杜拱辰. 现代预应力混凝土结构. 北京:中国建筑工业出版社,1988.254~264
- 4 Antoine E N. Prestressed concrete analysis and design. New York: McGraw-Hill, 1982.167~174

Analysis of Partially prestressed Concrete Continuous Beam by Bending Moment-Curvature Method

Fang Deping Lin Yusheng

(Dept. of Civil Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract With respect to a partially prestressed concrete beam, the relation between bending moment-axial force-curvature of its section is derived for general use. Based on the nonlinearity of stress-strain relation between concrete, prestressed reinforcement and non-prestressed reinforcement as well as the the secondary moment of statically indeterminate structure, a calculation is made on end-span beam and intermediate-span beam with different reinforcement. As shown by the result of calculation, a beam with a reinforcement index ranging from 0.1 to 0.25 shows a good ductility and load-carrying capacity; its ductility improves improved ductility with the increase of effective prestress and the corresponding decrease of its area.

Keywords partially prestressed concrete, continuous beam, bending moment, curvature, nonlinearity, secondary bending moment, ductility