高阶发展方程的两类显式格式的稳定性分析*

曾 文 平

（华侨大学管理信息科学系，泉州 362011）

摘要 对高阶发展方程$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}$给出了两类带参数$\alpha$的三层显式差分格式，其截断误差均为$O(\tau+h)$. 稳定性分析指出：当$k$为偶数时，它们无条件不稳定；当$k$为奇数时，稳定条件为$|R|\leqslant f(k,\alpha)$是$\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant10)$的上升函数，但为$k$的下降函数. 例如，当$k=1$时，$f(1,3)=0.987\ 123$，$f(1,10)=2.150\ 690$；当$k=3$时，$f(3,3)=0.109\ 153$，$f(3,10)=0.319\ 036$；当$k\leqslant9$（奇数）时，它们较大地改进了同类格式的稳定性条件$|R|\leqslant1/2^{2k}$.

关键词 高阶发展方程，显式差分格式，稳定性分析

分类号 O 241.82

文〔1〕讨论了发展方程$u_t=\alpha u^q u_1+a u_p$（其中$q\geqslant0$，$p\geqslant2$；q，p是整数；α，a是常数，u_1，u_p分别表示u对x的一阶和p阶导数）和守恒律. 对这样一类很重要的方程，如何建立相应的差分格式是一件很有意义的事. 众所周知，上述方程在某种意义上讲是下列两个方程：$u_t=\alpha u^q u_1$及$u_t=a u_p$的迭加. 文〔2〕分别对方程$u_t=a u_p$（当p为奇数及偶数的情况）建立若干差分格式，但其中的显式格式的稳定性条件较苛刻；而隐式格式则导致解线性方程组，使得计算量大为增加. 本文只讨论发展方程$u_t=a u_p$，当p为奇数即$p=2k+1$时的情况

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}\quad(k\geqslant1\text{ 的整数}),\tag{1}$$

a为可正可负的常数，建立两类三层含参数显式差分格式，并讨论其稳定性.

1 差分格式的构造

对高阶发展方程(1)提出如下两个三层显式差分格式

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+\alpha\frac{u_m^{n+1}-2u_m^n+u_m^{n-1}}{\tau}$$
$$=\frac{a}{h^{2k+1}}\delta_x^{2k}(u_m^n-u_{m-1}^n)+\alpha\left(\frac{u_{m-1}^n-u_{m-1}^{n-1}}{\tau}-\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}\right)\qquad(a>0),\tag{2}$$

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+\alpha\frac{u_m^{n+1}-2u_m^n+u_m^{n-1}}{\tau}$$
$$=\frac{a}{h^{2k+1}}\delta_x^{2k}(u_{m+1}^n-u_m^n)+\alpha\left(\frac{u_{m+1}^n-u_{m+1}^{n-1}}{\tau}-\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}\right)\qquad(a<0),\tag{3}$$

* 本文1995-11-17收到；福建省自然科学基金资助项目

其中 $0\leqslant\alpha\leqslant 10$ 是参数；τ,h 分别表示时间及空间方向步长；δ_x^{2k} 表示 $2k$ 阶中心差分算子.

易证格式(2)，(3)的局部截断误差均为 $O(\tau+\alpha h+h)$.

特别地，当 $k=1$ 时，即为文〔3〕对色散方程所给的差分格式.

2 稳定性分析

下面讨论 $\alpha>0$ 时的格式(2)的稳定性. 令 $R=a\tau/h^{2k+1}$，则格式(2)可改写为下列形式

$$\begin{aligned}&u_m^{n+1}-u_m^n+\alpha(u_m^{n+1}-2u_m^n+u_m^{n-1})\\&=R\delta_x^{2k}(u_m^n-u_{m-1}^n)+\alpha(u_{m-1}^n-u_{m-1}^{n-1}-u_m^{n+1}+u_m^n).\end{aligned}\tag{4}$$

利用 Fourier 分析法，令 $u_m^n=\lambda^n e^{im\theta h}(i^2=-1)$ 代入方程(4)得如下特征方程为

$$A\lambda^2+B\lambda+C=0,\tag{5}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&A=1+2\alpha,\qquad C=\alpha(1+e^{-i\varphi}),\qquad \varphi=\theta h,\\&B=-1-3\alpha-RQ-(\alpha-RQ)e^{-i\varphi},\\&Q=(-2)^k(1-\cos\varphi)^k.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

引理[4]　复系数二次方程(5)的根的模 $|\lambda_1|\leqslant 1,|\lambda_2|<1$ 的充要条件为

$$|A|>|C|,|\bar{A}B-\bar{B}C|\leqslant|A|^2-|C|^2,\tag{7}$$

其中 $\bar{A},\bar{B}$ 表示 A,B 的共轭复数. 若记

$$A_1=(1+4\alpha)+2\alpha^2(1-\cos\varphi),\ B_1=(1+2\alpha)(1-\cos\varphi),\ C_1=(1+4\alpha)\sin\varphi,\tag{8}$$

则

$$\bar{A}B-\bar{B}C=-(A_1+RQB_1+iRQC_1),\tag{9}$$

$$|A|^2-|C|^2=1+4\alpha+2\alpha^2(1-\cos\varphi)=A_1.\tag{10}$$

对于方程(5)，不妨设 $|\lambda_1|\geqslant|\lambda_2|$，则有 $|\lambda_2|^2\leqslant|\lambda_1\lambda_2|\leqslant\left|\frac{C}{A}\right|\leqslant\frac{2\alpha}{1+2\alpha}<1(\alpha\geqslant 0)$. 由引理和文〔5〕知，满足不等式(7)的 R 就是格式(2)的稳定性条件. 于是，由式(9)，(10)得条件式(7)，即 $|\bar{A}B-\bar{B}C|\leqslant|A|^2-|C|^2$ 化为 $|A_1+RQB_1+iRQC_1|\leqslant A_1$，或 $(A_1+RQB_1)^2+R^2Q^2C_1^2\leqslant A_1^2$. 此即

$$RQ(2A_1B_1+RQ(B_1^2+C_1^2))\leqslant 0,\tag{11}$$

注意到当 $a>0$ 时，$R=a\tau/h^{2k+1}>0$，而

$$\theta=(-2)^k(1-\cos\varphi)^k=\begin{cases}>0 & \text{当 } k \text{ 为偶数时},\\<0 & \text{当 } k \text{ 为奇数时}.\end{cases}\tag{12}$$

由式(11)，(12)可知：(Ⅰ)当 k 为偶数时，$2A_1B_1+RQ(B_1^2+C_1^2)\leqslant 0$，所以 $RQ\leqslant-2A_1B_1/(B_1^2+C_1^2)$. 因当 $a>0$ 时，这时 $R>0,A_1,B_1\geqslant 0,k$ 为偶数，故上式左端恒为正，而右端恒为负. 所以对任意 $R>0$ 上式恒不成立. 格式(2)恒不稳定；(Ⅱ)当 k 为奇数时，$Q<0$，由式(11)得 $RQ\geqslant-2A_1B_1/(B_1^2+C_1^2)$，即

$$R\leqslant\frac{-2A_1B_1}{Q(B_1^2+C_1^2)}\qquad\text{或 } R\leqslant\frac{2A_1B_1}{(-2)^{k-1}(1-\cos\varphi)^k(B_1^2+C_1^2)}(0\leqslant\alpha\leqslant 10).$$

于是稳定性条件成为

$$0\leqslant R\leqslant f(k,\alpha)=\min_{0\leqslant y\leqslant 2}(k,\alpha,y),\tag{13}$$

其中

$$F(k,\alpha,y)=\frac{(1+2\alpha)[1+4\alpha+2\alpha^2(1-\cos\varphi)]}{(-2)^{k-1}(1-\cos\varphi)^{k-1}[(1-\cos\varphi)^2(1+2\alpha)^2+(1+4\alpha)^2\sin^2\varphi]}$$

$$= \frac{(1+2\alpha)(1+4\alpha+2\alpha^2 y)}{(-2)^{k-1}[-4(1+3\alpha)\alpha y^{k+1}+2(1+4\alpha)^2 y^k]}, \tag{14}$$

其中 $a>0, y=1-\cos\varphi, 0\leqslant y\leqslant 2$.

重复前面的讨论可知，在式(13)中用 $-R$ 替换 R，则式(13)也是格式(3)($a<0$)的稳定性条件.

综上所述，差分格式(2)($a>0$)及式(3)($a<0$)只有在 k 为奇数时才存在稳定性条件，而 k 为偶数时恒不稳定.

下面求 $F(k,\alpha,y)$的极小值. 令$\frac{\partial F}{\partial y}=0$ 得二次方程为

$$A'y + B'y + c' = 0, \tag{15}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} A' &= 8k\alpha^3(1+3\alpha)(1+2\alpha), \\ B' &= 4\alpha(1+4\alpha)[(1+3\alpha)(1+k)+\alpha(1+4\alpha)(1-k)](1+2\alpha), \\ C' &= -2k(1+4\alpha)^3(1+2\alpha), \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

方程(15)有两个实根 $y_{1,2}=\frac{-B'\pm\sqrt{(B')^2-4A'C'}}{2A'}$. 显然，负根 y_2 不在区间 $0\leqslant y\leqslant 2$ 内($0\leqslant\alpha\leqslant 10$)，故应舍去. 用 0.618 法[6]验算可得 $F(k,\alpha,y)=\min\limits_{0\leqslant y\leqslant 2} F(k,\alpha,y)=f(k,\alpha)$. 具体数值见表 1，于是我们得

表 1　显式格式(2)和式(3)的稳定性条件

k	α	y_1	$F(k,\alpha,y_1)$	k	α	y_1	$F(k,\alpha,y_1)$
1	1	1.250 000	0.600 000	5	1	2.556 243	0.001 909
	2	1.001 050	0.801 886		2	2.349 474	0.003 987
	3	0.876 485	0.987 123		3	2.279 199	0.005 958
	4	0.794 830	1.164 339		4	2.243 573	0.007 892
	5	0.735 000	1.336 249		5	2.221 987	0.009 808
	6	0.688 335	1.504 246		6	2.207 491	0.011 714
	7	0.650 432	1.669 187		7	2.197 079	0.013 615
	8	0.618 750	1.831 650		8	2.189 237	0.015 513
	9	0.591 695	1.992 048		9	2.183 115	0.017 408
	10	0.568 201	2.150 690		10	2.178 203	0.019 301
3	1	2.239 110	0.044 675	7	1	2.707 225	0.000 069
	2	2.030 981	0.078 052		2	2.497 149	0.000 169
	3	1.955 233	0.109 153		3	2.427 050	0.000 267
	4	1.915 089	0.139 581		4	2.391 914	0.000 365
	5	1.890 000	0.169 721		5	2.370 787	0.000 462
	6	1.872 763	0.199 710		6	2.356 679	0.000 559
	7	1.860 165	0.229 610		7	2.346 587	0.000 655
	8	1.850 541	0.259 454		8	2.339 010	0.000 751
	9	1.842 945	0.289 259		9	2.333 112	0.000 848
	10	1.836 794	0.319 036		10	2.328 389	0.000 944

续表1

k	α	y_1	$F(k,\alpha,y_1)$	k	α	y_1	$F(k,\alpha,y_1)$
9	1	2.795 085	0.000 002	11	1	2.852 481	0.000 000
	2	2.581 914	0.000 007		2	2.636 831	0.000 000
	3	2.511 283	0.000 011		3	2.565 619	0.000 000
	4	2.476 029	0.000 015		4	2.530 147	0.000 001
	5	2.454 892	0.000 020		5	2.508 906	0.000 001
	6	2.440 804	0.000 024		6	2.494 763	0.000 001
	7	2.430 743	0.000 029		7	2.484 669	0.000 001
	8	2.423 198	0.000 033		8	2.477 103	0.000 001
	9	2.417 329	0.000 037		9	2.271 221	0.000 002
	10	2.412 635	0.000 042		10	2.466 517	0.000 002

定理 三层显式差分格式(3)($a>0$)及式(4)($a<0$),当 k 为偶数时恒不稳定;当 k 为奇数时其稳定性条件为 $|R|\leqslant f(k,\alpha)=\min\limits_{0\leqslant y\leqslant 2}F(k,\alpha,y)=F(k,\alpha,y_1)$,详见表1.由此可见:

(a)文[3]结果为本文结果当 $k=1$ 时的特例,两者的稳定性条件完全一致;

(b)当 k 为偶数时,即高阶发展方程(1)的阶数为5,9,13,17,…时,差分格式(2)($a>0$)及式(3)($a<0$)无条件不稳定;

(c)当 k 为奇数时,即高阶发展方程(1)的阶数为3,7,11,15,…时,差分格式(2)($a>0$)及式(3)($a<0$)的稳定性条件均为 $|r|\leqslant f(k,\alpha)$,其中函数 $f(k,\alpha)$ 是参数 $\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant10)$ 的上升函数,但却是 k(因而也是高阶发展方程(1)的阶数($2k+1$))的下降函数.例如,当 $k=1$ 时,$f(1,3)=0.987\,123$,$f(1,10)=2.150\,190$;当 $k=3$ 时,$f(3,3)=0.109\,153$;$f(3,10)=0.319\,036$.实际上,当 $k\geqslant11$ 时(即高阶发展方程(1)的阶数$\geqslant23$ 时),这两个格式的稳定性条件几乎为0,即变为无条件不稳定,因而不切实用.但当 $k\leqslant9$ 的奇数时,它们较大地改进了同类格式的稳定性条件 $|R|\leqslant1/2^{2k}$[2].

3 数值例子

考虑下列七阶发展方程的初值问题为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^7 u}{\partial x^7}\qquad(x>0,t>0),\\&u(x,0)=\frac{1}{42}x^7+6,\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

其精确解为

$$u(x,t)=120at+\frac{1}{42}x^7+6.\tag{18}$$

由于本文所构造的差分格式是三层格式,除初始层网格函数值由初始条件给出外,尚需给出第一层网格函数值.为方便计,假设第一层网格函数值仍按精确值计算.

表2给出误差 $|u(x_m,t_n)-u_m^n|$ 的部分数值,其中 u_m^n 表示用差分格式(2)($a>0$)及式(3)($a<0$)算出的解,$u(x_m,t_n)$ 表示精确解(18)算出的解.

数值结果表明:理论分析与实际计算相吻合,我们所作的稳定性分析是正确的.

表 2　显式格式(2)($a>0$)及式(3)($a<0$)的数值误差表

a	h	α	r	n	m = 1 100	1 300	1 700	1 900
				2	$5.820\,77\times10^{-11}$	0	$5.587\,94\times10^{-9}$	$1.117\,59\times10^{-8}$
1.00	0.01	10.00	0.31	502	$3.783\,50\times10^{-9}$	$7.217\,75\times10^{-9}$	$1.676\,38\times10^{-8}$	$7.078\,05\times10^{-8}$
				1 002	$5.704\,35\times10^{-9}$	$6.984\,92\times10^{-9}$	$1.266\,60\times10^{-7}$	$2.123\,42\times10^{-7}$
				2	$5.820\,77\times10^{-11}$	0	$7.450\,58\times10^{-9}$	$7.450\,58\times10^{-9}$
1.00	0.01	10.00	0.32	502	$5.285\,84\times10^{-7}$	$5.156\,27\times10^{-6}$	$2.957\,51\times10^{-4}$	$1.288\,54\times10^{-3}$
				1 002	$7.130\,09\times10^{-6}$	$1.009\,81\times10^{-4}$	$6.369\,74\times10^{-1}$	6.066 94
				2	0	$3.552\,71\times10^{-14}$	0	$1.455\,19\times10^{-11}$
−1.00	0.01	10.00	−0.31	502	$1.776\,36\times10^{-15}$	$2.060\,57\times10^{-13}$	$5.820\,77\times10^{-11}$	$7.130\,44\times10^{-10}$
				1 002	$4.174\,44\times10^{-14}$	$1.236\,61\times10^{-5}$	$1.818\,99\times10^{-10}$	$5.238\,69\times10^{-10}$
				2	0	$2.842\,17\times10^{-14}$	0	$1.455\,19\times10^{-11}$
−1.00	0.01	10.00	−0.31	502	$2.415\,31\times10^{-11}$	$3.353\,76\times10^{-11}$	$1.000\,44\times10^{-9}$	$6.228\,22\times10^{-9}$
				1 002	$9.221\,46\times10^{-1}$	$3.284\,69\times10^{7}$	$2.245\,83\times10^{-7}$	$4.168\,54\times10^{-7}$

苏亚欣、毛爱民同志协助上机计算，特此致谢.

参　考　文　献

1 屠规彰，秦孟兆．非线性演化方程的不变群与守恒律——对称函数方法．中国科学，1980，(5)：421～432

2 秦孟兆．一类演化方程 $u_t=au^q u_1+au_p$ 的差分格式．科学通报，1982，27(5)：261～263

3 武蔚文，廖晓峰．色散方程的两类显式差分格式．四川大学学报(自然科学版)，1991，28(2)：165～168

4 邬华谟．二次多项式根的 Schur-cohn 定理和 Miller 定理的初等证明．数值计算与计算机应用，1982，3(1)：63～64

5 Richtmyer R D, Morton K W. Difference methods for intial-value problems: New York: John Wiley & Sons., 1967. 86～89

6 杨箴引，马正午，孙　宇．电子计算机应用数学：第 1 册．北京：冶金工业出版社，1979. 391～393

Stability Analysis of Two Classes of Explicit Difference Schemes for High-Order Evolution Equations

Zeng Wenping

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract Two classes of three-level explicit difference schemes with parameter a and the same truncation error $O(\tau+h)$ are given here for the evolution equations of high-order $\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}$. As shown by stability analysis, while k is an even number, they are unconditionally unstable; while k is an odd number, they have the stability condition $|R|\leqslant f(k,\alpha)$ which is the increasing function of $\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant10)$ and the decreasing function of k. They are richly exemplified.

Keywords evolution equation of high-order, explicit difference scheme, stability analysis