第17卷 第3期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol.17 No.3
1996年7月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jul. 1996

双非线性抛物型方程解的有界性*

梁学信① 梁鋆廷②

(①华侨大学管理信息科学系,泉州 362011;②中山大学数学系,广州 510275)

摘要 在 $\lambda\in(1,2)$ 的情形,证明一类双非线性抛物型方程解的有界性.

关键词 双非线性抛物型方程,局部有界,整体有界

分类号 O 175.26

设 G 是 n 维欧氏空间 E^n 的有界域,$T>0$ 为有限值.在 $Q=G\times(0,T)$ 考虑双非线性抛物型方程,即

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u|^{\lambda-2}u)-\operatorname{div}A(x,t,u,\nabla u)+B(x,t,u,\nabla u)=0,\tag{1}$$

其中 $A(x,t,u,\xi)$ 和 $B(x,t,u,\xi)$ 在 $Q\times E^1\times E^n$ 上定义,关于 x,t 为可测.关于 u,ξ 为连续,并分别满足下面结构条件,即

$$\left.\begin{aligned}&\xi\cdot A(x,t,u,\xi)\geqslant|\xi|^p-c|u|^l-f_0(x,t),\\&|A(x,t,u,\xi)|\leqslant\kappa|\xi|^{p-1}+c|u|^{l(1-\frac{1}{p})}+f_1(x,t),\\&|B(x,t,u,\xi)|\leqslant b(x,t)|\xi|^\gamma+c|u|^{l-1}+f_2(x,t),\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

其中 $p>1,c\geqslant0,\kappa\geqslant1,l=p(1+\lambda/n),\gamma_0=p-(n+p)/(n+\lambda)\leqslant\gamma\leqslant p$,且

$$b(x,t)\in L_r(Q).\tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}&1/r=1-\gamma/p-1/l,\quad(\text{当 }\gamma_0\leqslant\gamma<p-n/(p+\lambda)=\gamma_1),\\&r=\infty,\quad(\text{当 }\gamma=\gamma_1\text{ 或 }\gamma=p),\\&1/r<\frac{p}{n+p}(1-\gamma/p),\quad(\text{当 }\gamma_1<\gamma<p).\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

$$f_i(x,t)\in L_{s_i}(Q)(i=0,1,2),s_0,s_2>(n+p)/p,s_1>(n+p)/(p-1).\tag{5}$$

对方程(1)解的性质,许多作者做了不少工作[1~7].其中,文[1]中对 $\lambda\geqslant2$ 的情形,证明了解的局部有界性和整体有界性.证明中用到如下不等式,即

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_G\zeta^p\psi^p(u-k)(|u|^{\lambda-2}u)_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\geqslant\frac{\lambda-1}{\lambda}\int_G\zeta^p\psi^p(u-k)^\lambda\mathrm{d}x-c(\lambda)\int_0^t\int_G\zeta^p\psi^{p-1}\psi'[(u-k)^\lambda+k^\lambda]\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{6}$$

式(6)中,$p>1$.然而这样的不等式对 $\lambda\in(1,2)$ 是不成立的,因而限制了将结果推广到 $\lambda\in(1,$

* 本文1996-01-17收到;福建省自然科学基金资助项目

2)情形．文〔1〕中的证明，使用的是迭代过程．本文用另外的不等式来代替式(6)，使迭代过程同样能进行，将文〔1〕中结果推广到 $\lambda\in(1,2)$ 的情形．此外，还要注意的是嵌入定理保证 $u\in L_l(Q)$，$l=p(1+\lambda/n)$．当 $l\geqslant\lambda$，即 $p\geqslant n\lambda/(n+\lambda)$ 时，文〔1〕中证明解的局部有界性的迭代过程可无条件地进行，而在 $1<p<n\lambda/(n+\lambda)$ 时，为保证能进行这种迭代，本文利用内插不等式．与此相应，还需增加对解 u 可积性的要求，即

$$u\in L_{\mathrm{loc},\tilde{l}}(Q)\ \tilde{l}>\frac{n}{p}(\lambda-p). \tag{7}$$

与文〔1〕一样，我们考虑的是广义解，称 u 是式(1)的广义解，如果

$$u\in C(0,T,L_\lambda(G))\cap L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(G))\cap L_{t^*}(Q), \tag{8}$$

其中

$$\left.\begin{array}{ll} t^*=l=p(1+\lambda/n), & \text{当 } \gamma_0\leqslant\gamma\leqslant\gamma_1, \\ \dfrac{1}{t^*}\Big[1-\dfrac{(p-\gamma)(n+\lambda)}{n+p}\Big]+\dfrac{p-\gamma}{p}\cdot\dfrac{n}{n+p}+\dfrac{\gamma}{p}+\dfrac{1}{r}=1, & \text{当 } \gamma_1<\gamma<p, \\ t^*=\infty, & \text{当 } \gamma=p, \end{array}\right\} \tag{9}$$

并满足如下积分恒等式

$$\int_0^t\int_G\{-u_t(|u|^{\lambda-2}u)+\nabla v\cdot A(x,t,u,\nabla u)+vB(x,t,u,\nabla u)\}\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$+\int_G v(x,t)|u(x,t)|^{\lambda-2}u(x,t)|_{t=0}^{t}\mathrm{d}x=0. \tag{10}$$

下面定理 1～3 为本文主要结果．

定理 1 设满足条件(2)～(5)，$\lambda\in(1,2)$，$p>1$，且 $p\geqslant n\lambda/(n+\lambda)$，$\gamma_0\leqslant\gamma<p$；$u$ 是式(1)的广义解；那么 u 在 Q 内局部有界．

定理 2 设满足条件(2)～(5)，(7)，且 $\lambda\in(\frac{n}{n-1},2)\subset(1,2)$，$1<p<n\lambda/(n+\lambda)$，$\gamma_0\leqslant\gamma<p$；设 u 是式(1)的广义解；那么 u 在 Q 内局部有界．

定理 3 设满足条件(2)～(5)，且 $\lambda\in(1,2)$，$\gamma_0\leqslant\gamma<p$；设 u 是式(1)的广义解，且存在常数 $M>0$，使

$$(u-M)^+=\max(u-M,0)=0\quad\text{在 } \partial G\times(0,T)\cup G\times\{0\} \tag{11}$$

成立，那么 u 在 Q 整体有界．

1 定理的证明

为证明定理成立，我们要用到下面的引理，它是文〔8〕中第Ⅰ章式(3,4)的直接推论．

引理 1 设 $u\in L_\infty(0,T;L_\lambda(G))\cap L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(G))$，那么

$$\iint_Q|u|^l\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C(p,n,\lambda)(\mathrm{vrai}\max_{t\in(0,T)}\int_G|u|^\lambda\mathrm{d}x)^{p/n}\iint_Q|\nabla u|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

(1) 定理 1 的证明．不妨设 $(0,t_0)$ 是 Q 的一点，$\rho\leqslant1$，$B(\rho)=\{x\in E^n,|x|<\rho\}$，$B(\rho)\times(t_0-\rho^p,t_0)\subset Q$；设 $\rho/2\leqslant\rho_1<\rho_0\leqslant\rho$，$0\leqslant t_0-\rho^p\leqslant\tau_0<\tau_1\leqslant t_0-(\rho/2)^p$；设 $\zeta(x)=\zeta(|x|)$ 和 $\psi(t)$ 分别是 $|x|$ 和 t 的逐段为线性的连续函数，满足

$$\zeta(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } |x|\leqslant\rho_1,\\ 0, & \text{当 } \rho\geqslant\rho_0;\end{cases}\qquad \psi(t)=\begin{cases}0, & \text{当 } t\leqslant\tau_0,\\ 1, & \text{当 } t\geqslant\tau_1;\end{cases}$$

那么，$|\nabla\zeta(x)|\leqslant 1/(\rho_0-\rho_1)$，$0\leqslant\psi'(t)\leqslant 1/(\tau_1-\tau_0)$．设 $k\geqslant 0$，$v=\zeta^p\psi^p(u-k)^+$（为推导简单，设 $u\in W_\lambda^1(0,T;L_\lambda(G))$；否则用 v 对时间的平均取代 v，到最后才过渡到极限），那么 v 可取作试验函数．将它代入(10)，对 t 分部积分得

$$
\begin{aligned}
0\geqslant\int_0^t\int_{G\cap\{u>k\}}&\{\zeta^p\psi^p(u-k)\frac{\partial}{\partial t}(|u|^{\lambda-2}u)+\zeta^p\psi^p(|\nabla u|^p-C|u|^l-f_0)\\
&-p\zeta^{p-1}\psi^p(u-k)|\nabla\zeta(\kappa|\nabla u|^{p-1}+C|u|^{l(1-1/p)}+f_1)\\
&-\zeta^p\psi^p(u-k)(b(x,t)|\nabla u|^\gamma+C|u|^{l-1}+f_2)\}\mathrm{d}x\mathrm{d}t.
\end{aligned}\tag{12}
$$

现处理第一项，设 $g(u)=\int_k^u(s-k)s^{\lambda-2}\mathrm{d}s$，那么在 $Q\cap\{u>k\}$ 时，有 $g(u)\leqslant\int_k^u s^{\lambda-1}\mathrm{d}s\leqslant\frac{1}{\lambda}u^\lambda$，$g(u)\geqslant\int_k^u(s-k)^\lambda/u\mathrm{d}s=\frac{(u-k)^\lambda}{\lambda+1}(1-\frac{k}{u})$．据此，对任何 $h>k$，有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t\int_{G\cap\{u>k\}}\zeta^p\psi^p(u-k)\frac{\partial}{\partial t}(|u|^{\lambda-2}u)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&=(\lambda-1)\int_{G\cap\{u>k\}}\zeta^p\psi^p g(u)\mathrm{d}x-(\lambda-1)\int_0^t\int_{G\cap\{u>k\}}p\zeta^p\psi^{p-1}\psi' g(u)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\geqslant\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\int_{G\cap\{u>h\}}\zeta^p\psi^p(u-h)^\lambda(1-k/h)\mathrm{d}x-\frac{\lambda-1}{\lambda}\int_0^t\int_{G\cap\{u>k\}}p\zeta^p\psi^{p-1}\psi' u^\lambda\mathrm{d}x\mathrm{d}t,
\end{aligned}\tag{13}
$$

由式(12)，(13)并应用 Young 不等式，得

$$
\begin{aligned}
&(1-k/h)\int_{G\cap\{u>h\}}\zeta^p\psi^p(u-h)^\lambda\mathrm{d}x+\int_0^t\int_{G\cap\{u>k\}}\zeta^p\psi^p|\nabla u|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
\leqslant C&\int_0^t\int_{G\cap\{u>k\}}\{\zeta^p\psi^{p-1}\psi'|u|^\lambda+\zeta^p\psi^p(C|u|^l+f_0)\\
&+\zeta^p\psi^p(u-k)(b(x,t)|\nabla u|^\gamma+C|u|^{l-1}+f_2)\\
&+\zeta^{p-1}\psi^p(u-k)|\nabla\zeta|(C|u|^{l(1-1/p)}+f_1)\\
&+\psi^p|\nabla\zeta|^p(u-k)^p\}\mathrm{d}x\mathrm{d}t.
\end{aligned}\tag{14}
$$

记 $\alpha=(p-\gamma)(n+\lambda)/(n+p)$，并注意到式(9)，有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t\int_{G\cap\{u>k\}}\zeta^p\psi^p(u-k)b(x,t)|\nabla u|^\gamma\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&=\int_0^t\int_{G\cap\{u>k\}}\zeta^p\psi^p(u-k)^\alpha(u-k)^{1-\alpha}b(x,t)|\nabla u|^\gamma\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\leqslant\Big(\int_0^t\int_{G\cap\{u>k\}}\zeta^p\psi^p|\nabla u|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)^{\gamma/p}\Big(\int_0^t\int_{G\cap\{u>k\}}\zeta^p\psi^p(u-k)^l\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)^{\alpha/l}\\
&\quad\times\Big(\iint_{Q\cap\{u>k\}}|u|^{l^*}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)^{(1-\alpha)/l^*}\Big(\iint_{Q\cap\{u>k\}}b^r(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)^{1/r}.
\end{aligned}\tag{15}
$$

联合式(14)，(15)，借助 Young 不等式，并对 $t\in(0,t_0)$ 求上确界，可得

$$
\begin{aligned}
&(1-k/h)\operatorname*{vrai\,max}_{t\in(0,t_0)}\int_{G\cap\{u>h\}}\zeta^p\psi^p(u-h)^\lambda\mathrm{d}x+\iint_{A(k,\rho_0,\tau_0)}\zeta^p\psi^p|\nabla u|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\leqslant C\Big\{\iint_{A(k,\rho_0,\tau_0)}\Big[\frac{(u-k)^\lambda+k^\lambda}{\tau_1-\tau_0}+\frac{(u-k)^p}{(\rho_0-\rho_1)^p}\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\quad+\iint_{A(k,\rho_0,\tau_0)}((u-k)^l+k^l)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\|f_0\|_{L_{s_0}(Q)}|A(k,\rho_0,\tau_0)|^{1-1/s_0}
\end{aligned}
$$

$$+\iint_{A(k,\rho_0,\tau_0)}(u-k)^l\mathrm{d}x\mathrm{d}t)^{1/l}\|f_2\|_{L_{s_2}(Q)}|A(k,\rho_0,\tau_0|^{1-1/l-1/s_2}$$

$$+\frac{1}{\rho_0-\rho_1}(\iint_{A(k,\rho_0,\tau_0)}(u-k)^l\mathrm{d}x\mathrm{d}t)^{1/l}\|f_1\|_{L_{s_1}(Q)}|A(k,\rho_0,\tau_0)|^{1-1/l-1/s_1}$$

$$+(\iint_{A(k,\rho_0,\tau_0)}(u-k)^l\mathrm{d}x\mathrm{d}t)^{q/l}(\iint_{A(k,\rho_0,\tau_0)}|u|^{l^*}\mathrm{d}x\mathrm{d}t)^{(1-\alpha)/l^*}(\iint_{A(k,\rho_0,\tau_0)}b^r(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t)^{1/r},\quad(16)$$

其中 $A(k,\rho_0,\tau_0)=B(\rho_0)\times(\tau_0,t_0)\cap\{u>k\}$，$|A|$ 记集合 A 的 $n+1$ 维 Lebesque 测度，$q=ln/(n+p)=p(n+\lambda)/(n+p)$，常数 C 和 $\rho_0,\rho_1,\tau_0,\tau_1$ 以及 h,k 无关．设 $k>h_0\geqslant0$，我们有

$$|A(k,\rho_0,\tau_0)|\leqslant\iint_{A(k,\rho_0,\tau_0)}|\frac{u-h_0}{k-h_0}|^l\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\iint_{A(h_0,\rho_0,\tau_0)}|\frac{u-h_0}{k-h_0}|^l\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\quad(17)$$

特别地，对 $h>h_0\geqslant0$ 和 $k=\frac{1}{2}(h+h_0)$，由式(16)，(17)可给出下式

$$(1-h_0/h)\operatorname{vrai}\max_{t\in(0,t_0)}\int_{G\cap\{u>k\}}\zeta^p\psi^p(u-h)^\lambda\mathrm{d}x+\iint_{A(h,\rho_0,\tau_0)}\zeta^p\psi^p|\nabla u|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$\leqslant C\{\frac{1}{\tau_1-\tau_0}\iint_{A(h_0,\rho_0,\tau_0)}(u-h_0)^\lambda[1+(\frac{h}{h-h_0})^\lambda]\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{(\rho_0-\rho_1)^p}\cdot\frac{1}{(h-h_0)^{l-p}}\iint_{A(h_0,\rho_0,\tau_0)}(u-h_0)^l\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$+\iint_{A(h_0,\rho_0,\tau_0)}(u-h_0)[1+(\frac{h}{h-h_0})^l]\mathrm{d}x\mathrm{d}t+[\frac{1}{(h-h_0)^l}\iint_{A(h_0,\rho_0,\tau_0)}(u-h_0)^l\mathrm{d}x\mathrm{d}t]^{1-1/s_0}$$

$$+(h-h_0)^{-l(1-1/l-1/s_2)}(\iint_{A(h_0,\rho_0,\tau_0)}(u-h_0)^l\mathrm{d}x\mathrm{d}t)^{1-1/s_2}$$

$$+(\rho_0-\rho_1)^{-1}(h-h_0)^{l(1-1/l-1/s_1)}(\iint_{A(h_0,\rho_0,\tau_0)}(u-h_0)^l\mathrm{d}x\mathrm{d}t)^{1-1/s_1}$$

$$+(\iint_{A(h_0,\rho_0,\tau_0)}(u-h_0)^l\mathrm{d}x\mathrm{d}t)^{q/l}(\iint_{A(h_0,\rho_0,\tau_0)}|u|^{l^*}\mathrm{d}x\mathrm{d}t)^{(1-\alpha)/l^*}(\iint_{A(h_0,\rho_0,\tau_0)}b^r(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t)^{1/r}.\quad(18)$$

在 $B(\rho)\times(\tau_0,t_0)$ 上对 $\zeta^p\psi^p(u-h)^+$ 应用引理1，得

$$\iint_{A(h,\rho_1,\tau_1)}(u-h)^l\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\iint_{A(h,\rho_0,\tau_0)}|\zeta^p\psi^p(u-h)|^l\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$\leqslant(\operatorname{vrai}\max_{t\in(0,t_0)}\int_{B(\rho_0)}|\zeta^p\psi^p(u-h)^+|^\lambda\mathrm{d}x)^{p/n}\iint_{A(h,\rho_0,\tau_0)}(\zeta^p\psi^p|\nabla u|^p+|\nabla\zeta|^p(u-h)^p)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\quad(19)$$

联合式(18)，(19)，即得

$$\iint_{A(h,\rho_1,\tau_1)}(u-h)^l\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant(\frac{h}{h-h_0})^{p/n}\{\cdots\}^{1+p/n},\quad(20)$$

$\forall h>h_0\geqslant0,\rho/2\leqslant\rho_1<\rho_0\leqslant\rho,t_0-\rho^p\leqslant\tau_0<\tau_1\leqslant t_0-(\rho/2)^p$，其中常数 $C>0$ 与 $h,h_0,\rho_0,\rho_1,\tau_0,\tau_1$ 无关．记号$\{\cdots\}$和式(18)右端表达式一样。设 $\theta,\delta_i\in(0,1)$ 待定，则

$$\left.\begin{aligned}\iint\limits_{B(\rho_0)\times(t_0-\rho^p,t_0)} |u|^{t^*}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant \theta\rho^{n+p},\\ \iint\limits_{B(\rho_0)\times(t_0-\rho^p,t_0)} b^r(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant \delta^{nr/(n+p)},\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

取 $H=H(\theta,\delta,\rho)>0$，对 $m=0,1,2,\cdots$，置 $h_m=2H-H/2^m$，$\rho_m=\rho(1+1/2^m)$，$\tau_m=t_0-(\rho/2)^p-\frac{1}{2^m}[\rho^p-(\rho/2)^p]$，$J_m=\iint\limits_{A(h_m,\rho_m,\tau_m)}(u-h_m)^l\mathrm{d}x\mathrm{d}t$. 分别用 h_m,h_{m+1} 取代 h_0,h；用 ρ_m,ρ_{m+1} 取代 ρ_0，ρ_1；用 τ_m,τ_{m+1} 取代 τ_0,τ_1. 由式(20)，(21)给出下式，即

$$\begin{aligned}J_{m+1}^{n/(n+p)} \leqslant{}& C2^{mp/(n+p)}\{\frac{2^{m(1+\lambda)}}{\rho^p}J_m+\frac{2^{ml}}{\rho^pH^{l-p}}J_m+2^{ml}J_m\\ &+(\frac{2^{ml}}{H}J_m)^{1-1/s_0}+(\frac{2^m}{H})^{l(1-1/l-1/s_2)}J_m^{1-1/s_2}+\frac{1}{\rho}\cdot 2^{m(1+l(1-1/l-1/s_1))}H^{-l(1-1/l-1/s_1)}\\ &\times J_m^{1-1/s_1}+J_m^{n/(n+p)}(\theta\rho^{n+p})^{(1-a)/t^*}\delta^{n/(n+p)} \qquad (m=0,1,2,\cdots).\end{aligned} \tag{22}$$

式(21)隐含了下式

$$J_0 \leqslant \iint\limits_{B(\rho_0)\times(t_0-\rho^p,t_0)} |u|^l\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C\theta^{l/t^*}\rho^{n+p}. \tag{23}$$

为方便起见，把式(23)中出现的常数 C 吸收到 θ 中，可认为

$$J_0 \leqslant \theta^{l/t^*}\rho^{n+p}. \tag{24}$$

不妨设 $H\geqslant1$，注意到 $\rho\leqslant1$，只要取 θ,δ 满足下式，即 $2^{p/(n+p)+1+\lambda}\delta^{p/(n+p)}\leqslant1$，$2^{p/(n+p)+l}\delta^{p/(n+p)}\leqslant1$，$2^{p/(n+p)+l(1-1/s_0)}\delta^{p/(n+p)-1/s_0}\leqslant1$，$2^{p/(n+p)+l(1-1/l-1/s_2)}\delta^{p/(n+p)-1/s_2}\leqslant1$，$2^{p/(n+p)+l(1-1/l-1/s_1)}\delta^{p/(n+p)-1/s_1}\leqslant1$，$2\delta\leqslant1$，$C[3\theta^{l/t^*\cdot p/(n+p)}+\theta^{l/t^*(p/(n+p)-1/s_0)}+\theta^{l/t^*(p/(n+p)-1/s_2)}+\theta^{l/t^*(p/(n+p)-1/s_1)}+\theta^{(1-a)/t^*}]\leqslant\delta^{n/(n+p)}$，那么，根据式(22)，(24)，用归纳法可证得 $J_m\leqslant\delta^m\theta^{l/t^*}\rho^{n+p}$ 对一切正整数 m 成立，于是 $0=\lim\limits_{m\to\infty}J_m=\iint\limits_{B(\rho/2)\times(t_0-(\rho/2)^p,t_0)}(u-2H)^l\mathrm{d}x\mathrm{d}t$，即 $\operatorname*{vrai\,max}\limits_{B(\rho/2)\times(t_0-(\rho/2)^p,t_0)} u\leqslant2H<\infty$，这表示 u 在 Q 局部有上界. 用 $(-u)$ 取代 u，同样的方法可证 u 局部有下界. 定理证毕.

(2) 定理2的证明. 在 $\lambda\in(\frac{n}{n-1},2)\subset(1,2)$，$1<p<\frac{n\lambda}{n+\lambda}$ 的情形，前面的推导直至式(20)都是成立的，只是现在的情形 $l=p(1+\lambda/n)<\lambda$. 借助于内插不等式，有

$$\iint\limits_{A(h_0,\rho_0,\tau_0)}(u-{}_0)^\lambda\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant(\iint\limits_{A(h_0,\rho_0,\tau_0)}(u-h_0)^l\mathrm{d}x\mathrm{d}t)^{\beta\lambda/l}(\iint\limits_{A(h_0,\rho_0,\tau_0)}(u-h_0)^{\bar{l}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t)^{(1-\beta)\lambda/\bar{l}},$$

其中 $1/\lambda=\beta/l+(1-\beta)/\bar{l}$，即 $\beta=(1/\lambda-1/\bar{l})/(1/l-1/\bar{l})$. 据此以及对 $\bar{l}$ 的假定(7)，有

$$\lambda\beta/l>n/(n+p),\quad l=\lambda\beta/l+\lambda(1-\beta)/\bar{l}. \tag{25}$$

不妨设 $\bar{l}>t^*$，那么代替式(21)的第1个不等式，则要求 $\iint\limits_{B(\rho_0)\times(t_0-\rho^p,t_0)}|u|^{\bar{l}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\theta\rho^{n+p}$. 它隐含了下式 $\iint\limits_{B(\rho_0)\times(t_0-\rho^p,t_0)}|u|^{t^*}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C\theta^{t^*/\bar{l}}\rho^{n+p}$，$\iint\limits_{B(\rho_0)\times(t_0-\rho^p,t_0)}|u|^l\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C\theta^{l/\bar{l}}\rho^{n+p}$. 与此同时，代替出现在式(22)右端花括号中第1项的将是下式，即 $\frac{2^{m(1+\lambda)}}{\rho^p}J_m^{\beta\lambda/l}(\theta\rho^{n+p})^{\lambda(1-\beta)/\bar{l}}$. 由于式(25)成立，类

似前面的证明可以进行,直至得到 u 的局部有界性.定理证毕.

定理 3 的证明也可类似地进行,并且无需区别 $l\geqslant\lambda$ 和 $l<\lambda$ 的情形.因为用 $k>M$ 取代 M,式(11)仍保持成立.这样 $u=(u-k)^{-}$ 可取作试验函数,这相当于 $\zeta(x)=\psi(t)=1$.这样代替式(14)的将是下式,即

$$(1-k/h)\int_{G\cap\{u>k\}}(u-k)^{\lambda}\mathrm{d}x+\iint_{Q\cap\{u>k\}}|\nabla u|^{p}\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$\leqslant C\iint_{Q\cap\{u>k\}}[(C|u|^{l}+f_{0})+(u-k)(b(x,t)|\nabla u|^{r}+C|u|^{l-1}+f_{2})]\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

余下的证明与前面类似,这里从略.

参 考 文 献

1 Liang Xiting, Liang Xuexin. Boundedness properties of solutions of doubly nonlinear parabolic equations. Acta. Math. Sci. Supp., 1994, (14): 110~117

2 Liang Xiting, Liang Xuexin. A property for non-negative soultions of doubly nonlinear parabolic equations. Pure Appl. Math., 1996, 12(1): 63~66

3 Liang Xuexin, Liang Xiting. Boundedness for solutions of doubly nonlinear parabolic systens. J. Math. Study, 1995, 28(3): 63~73

4 梁錖廷.双非线性抛物组解最大模的估计.中山大学学报(自然科学版),1994,33(4):111~113

5 梁学信,梁錖廷.双退缩抛物型方程解的一个性质.数学研究与评论,1995,15(3):391~396

6 Vespri V. On the local behaviour of a certain class of doubly nonlinear parabolic equations. Manuscripta Math., 1992, 75: 65~80

7 Porzio M M, Vespri V. Hölder estimates for local solutions of some doubly nonlinear degenerate parabolic equations. J. Diff. Equs., 1993, 103(1): 146~178

8 Ladyzenskaja O A, Solonnikov V A, Uralceva N N. Linear and quasilinear equations of parabolic type. Transl. Math. Monographs, 1968, 23: 75~76

The Boundedness of the Solution to the Doubly Nonlinear Parabolic Equation

Liang Xuexin[①] Liang Xiting[②]

(①Detp. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou; ②Dept. of Math., Zhongshan Univ., 510275 Guanzhou)

Abstract Under the condition of $\lambda\in(1,2)$, the boundedness of the solution to the doubly nonlinear parabolic equation is proved.

Keywords doubly nonlinear parabolic equation, locally bounded, wholly bounded