

柔性机械手的动力学方程*

林 瑞 麟

(华侨大学精密机械工程系, 泉州 362011)

摘要 采用规范理论和旋量矩阵相结合的方法, 确定刚体运动与弹性变形的耦合关系, 给出的系统普遍动力学方程同样适用于树形柔性多体系统. 该方程不仅简明、系统性强, 而且计算简便.

关键词 柔性机械手, 规范理论, 动力学方程

分类号 TP 24

随着机器人技术向高速和高精度化发展, 弹性变形的影响成为机器人动力学中令人注目的问题. 弹性变形后, 由于刚体大位移与构件小变形的耦合, 以及系统的自由度变得很大, 柔性机器人动力学模型十分复杂, 精确建模一直停留在 1, 2 杆手臂模型^[1]. 虽已有人将有限元法、Jourdain 变分法、结构动力学与多体系统动力学理论引入机器人研究领域, 并在构件弹性变形的动力学研究中取得不少成果, 但计算还是比较烦杂. 本文采用规范理论和旋量方法建立柔性机械手的普遍动力学方程, 其结构简明且具有统一的矩阵形式, 计算也较简单^[2].

1 旋量与规范理论

1.1 旋量

矢量 S 在三维空间的位置和方向, 由其矢部 S 及其给定参考点 A 的线矩 S' 确定, 用 Plücker 坐标表示为 (S, S') , 其对偶矢量的表达式为

$$\hat{S}_A = S + \epsilon S',$$

式中 ϵ 是 Clifford 对偶标记, 定义 $\epsilon^2 = \epsilon^3 = \dots = 0$.

当对偶矢量 \hat{S}_A 的参考点由 A 点移至 B 点, 且 $S \cdot S' \neq 0$ 时, 存在 $\hat{S}_B = \hat{S}_A + \epsilon r \times S$, 此时的对偶矢量 \hat{S} 称为旋量, r 是 A 点至 B 点的矢径. 将对偶矢量 (S, S') 对参考坐标系 $(O, X_K)_i$ 上的分量 $S_K, S'_K (K=1, 2, 3)$ 依次排成的六阶列阵, 称为矢量 S 对于 $(O, X_K)_i$ 的旋量列阵, $\hat{S} = [S_1, S_2, S_3, S'_1, S'_2, S'_3]^T$. 设 $e_s (s=1, 2, 3)$ 为参考系的基矢量.

对偶矢量 (S, S') 在不同参考系 $(O, X_K)_i$ 及 $(O, X_K)_j$ 的旋量坐标列阵 \hat{S}^i 与 \hat{S}^j 之间满足如下关系, 即

$$\hat{S}^i = \hat{A}^{ij} \hat{S}^j, \quad (1)$$

式中 \hat{A}^{ij} 为旋量变换矩阵, $\hat{A}^{ij} = A^{ij} + \epsilon B^{ij}$, A^{ij} 为旋转螺旋变换矩阵, B^{ij} 为平移螺旋变换矩阵.

* 本文 1995-09-20 收到

$$A^{ij} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix},$$

$\alpha_{\gamma\zeta}$ 是第 ζ 行,第 γ 列不同基点的基矢量 e_i^ζ 与 e_i^γ 之间夹角 $\theta_{\gamma\zeta}$ 的余弦.

设 r^{ij} 为参考系原点 O_i 至 O_j 的矢径, \tilde{r}^{ij} 为矢径 r^{ij} 在坐标系 $(O, X_k)_i$ 的坐标 $r_s^{ij}(S=1,2,3)$ 排成的反对称方阵,即

$$\tilde{r}^{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -r_3^{ij} & r_2^{ij} \\ r_3^{ij} & 0 & -r_1^{ij} \\ -r_2^{ij} & r_1^{ij} & 0 \end{bmatrix},$$

则 $B^{ij} = \tilde{r}^{ij} \cdot A^{ij}$.旋量变换矩阵定义为

$$\hat{A}^{ij} = \left[\begin{array}{c|c} A^{ij} & 0 \\ \hline B^{ij} & A^{ij} \end{array} \right],$$

任意两参考系之间的变换矩阵等于一系列相邻系之间变换矩阵的连乘积 $\hat{A}^{ij} = \prod_{\lambda=i}^{j-1} \hat{A}^{\lambda, \lambda+1}$.力系中的主矩 M 与向任意点简化的主矢 F ,刚体的瞬时角速度 ω 及体内任意点的速度 V ,质系的动量 Q 与相对任意点的动量矩 H 等物理量的旋量表示式为

$$\hat{V} = \begin{bmatrix} \omega \\ V \end{bmatrix}, \quad \hat{Q} = \begin{bmatrix} Q \\ H \end{bmatrix}, \quad \hat{F} = \begin{bmatrix} F \\ M \end{bmatrix}.$$

2.2 规范理论

取 $(O, X_K)_i (K=1,2,3)$ 为惯性系用 e_i 表示;另一参考系 $(O, X_K)_j (K=1,2,3)$ 用 e_j 表示.一个点在 e_i 中位置用 X_i 表示,在 e_j 中用 X_j 表示,存在变换矩阵 A^{ij} ,使得 $x_i = A^{ij} X_j$.已知质点运动的Newton方程 $m\ddot{X}_i = f$ 在惯性系中成立,当 A^{ij} 与时间无关($\dot{A}^{ij}=0$)时, e_j 也是惯性系.此时Newton方程在这个变换下是协变的,意味着方程中的各项均按一致的方式变换,取 $\ddot{X}_i = A^{ij} \ddot{X}_j$, $f = A^{ij} F$,而方程本身保持形式不变 $m\ddot{X}_i = F$.因此,协变的一个必要条件是时间导数与变换矩阵的可变换性^[3],即 $\dot{X}_i = d(A^{ij} X_j)/dt = A^{ij} \dot{X}_j$.现令 A^{ij} 与时间有关,此时 e_i 不再是惯性参考系, d/dt 与 A^{ij} 不再是可以交换,此将普通时间导数 d/dt 换成协变时间导数,即

$$D = d/dt + \hat{V}, \quad (2)$$

式中 \hat{V} 为构件 j 中一点的速度旋量在 e_j 中的表示.

设 m_j, J_j 为构件 j 的质量及相对 e_j 的惯量矩阵, \tilde{P}_j 为质心 C 相对 O_j 的矢径 P_j 在 e_j 上的反对称方阵, E 为三维单位阵, $\hat{\mathcal{Q}}_j$ 为构件 j 相对 e_j 的广义惯量矩阵,当 O_j 取在关节位置,则

$$\hat{\mathcal{Q}}_j = \left[\begin{array}{c|c} m_j E & m_j \tilde{P}_j^T \\ \hline m_j \tilde{P}_j & J_j \end{array} \right].$$

若原点 O_j 取在构件的质心 C 位置,则

$$\hat{\mathcal{Q}}_j = \left[\begin{array}{c|c} m_j E & 0 \\ \hline 0 & J_j \end{array} \right].$$

将刚体的运动方程写成规范不变式,即

$$D\hat{Q}_j = \hat{F}_j, \quad (3)$$

式中 $\dot{\mathbf{Q}}_j = \dot{\mathcal{O}}_j \hat{\mathbf{V}}_j$ 代入式(2), 得刚体的欧位方程 6×6 矩阵表示式为

$$\dot{\mathcal{O}}_j \hat{\mathbf{V}}_j + \hat{\mathbf{V}}_j \dot{\mathcal{O}}_j \hat{\mathbf{V}}_j = \hat{\mathbf{F}}_j$$

2 运动学分析

机械手柔体系统由 n 个构件 B 及 n 个关节组成, 将固联于各可动件上的附体参考系 $(O, X_K)_j (K=1, 2, 3)$ 的原点放在构件组的关节上, 系统规则编号规定原点 O_j 与所在关节联结的外侧构件相同标号, 构件序号由内向外递增, B_{j-1}, B_{j+1} 分别为 B_j 的内侧构件和外侧构件. 设定构件的柔性变形为小变形, 因此只考虑各弹性位移及导数的一阶微量, 构件变形的弹性线位移及弹性角位移分别为 $U_{j1}, U_{j2}, U_{j3}, \beta_{j1}, \beta_{j2}, \beta_{j3}$. 取模态坐标 a 来描述弹性变形, 即 $a = [a_1(t) a_2(t) \cdots a_n(t)]^T$, Ψ 为与位置和时间有关的函数, 即 $U = \Psi a$. 设 q_j 为刚体位移的广义坐标, θ_j 为 O_j 关节的转角, Z_j 为关节滑动距离, $q_j = [Z_K \theta_K]^T (K=1, 2, 3)$. 定义函数

$$\mu_j = \begin{cases} 1 & (\text{当第 } j \text{ 个关节是转动付时}), \\ 0 & (\text{当第 } j \text{ 个关节是移动付时}), \end{cases}$$

则

$$q_j = (1 - \mu_j)Z_j + \mu_j\theta_j \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

设 $\hat{A}_{(j-1)j}$ 为机械手刚体位移时, 参考系 e_j 相对于 e_{j-1} 的旋量变换矩阵; $A_{(j-1)j}, B_{(j-1)j}$ 为其相应的旋转变换矩阵及平移变换矩阵, $\hat{A}'_{(j-1)j}$ 为机械手弹性变形后 e_j 相对于 e_{j-1} 的旋量变换矩阵; $\hat{A}'_{(j-1)j}, \hat{B}'_{(j-1)j}$ 为其变形后相应的旋转变换及平移变换矩阵; $\hat{\beta}_j$ 为弹性角位移投影方阵; \hat{U}_j 为弹性变形反对称投影方阵; 则

$$\hat{\beta}_j = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{j3} & \beta_{j2} \\ \beta_{j3} & 1 & -\beta_{j1} \\ -\beta_{j2} & \beta_{j1} & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{U}_j = \begin{bmatrix} 0 & -U_{j3} & U_{j2} \\ U_{j3} & 0 & -U_{j1} \\ -U_{j2} & U_{j1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$A'_{(j-1)j} = A_{(j-1)j} \hat{\beta}_j, \quad \tilde{r}'_{(j-1)j} = \hat{r}_{(j-1)j} + \hat{U}_j,$$

$$\tilde{B}'_{(j-1)j} = \hat{r}'_{(j-1)j} + A_{(j-1)j}, \quad \hat{A}'_{(j-1)j} = \begin{bmatrix} A'_{(j-1)j} & 0 \\ \tilde{B}'_{(j-1)j} & A'_{(j-1)j} \end{bmatrix}.$$

$\hat{A}'_{(j-1)j}$ 的逆阵 $\hat{A}'_{j(j-1)}$ 则为组成 $\hat{A}'_{(j-1)j}$ 的子矩阵转置, 即

$$\hat{A}'_{j(j-1)} = (\hat{A}'_{(j-1)j})^{-1} = \begin{bmatrix} (A'_{(j-1)j})^T & 0 \\ (\tilde{B}'_{(j-1)j})^T & (A'_{(j-1)j})^T \end{bmatrix}.$$

依据 Mukobratovic 认为刚体的大位移与构件的小变形之间的耦合为弱耦合的情形, 两相邻构件运动学递推式为

$$\hat{\mathbf{V}}_j = \hat{A}_{(j-1)j}(\hat{\mathbf{V}}_{j-1} + \hat{\mu}\dot{\mathbf{q}}_j) + \hat{A}'_{(j-1)j}\dot{\hat{\mathbf{U}}}_j = \hat{\mathbf{Q}}_j + \hat{\mathbf{A}}_j, \quad (5)$$

式中

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Q}}_j &= \hat{A}_{(j-1)j}(\hat{\mathbf{V}}_{j-1} + \hat{\mu}\dot{\mathbf{q}}_j), \quad \hat{\mathbf{A}}_j = \hat{A}'_{(j-1)j}\dot{\hat{\mathbf{U}}}_j, \\ \dot{\hat{\mathbf{V}}}_j &= \dot{\hat{\mathbf{Q}}}_j + \dot{\hat{\mathbf{A}}}_j + \hat{\mathbf{Q}}_j\dot{\hat{\mathbf{A}}}_j, \end{aligned} \quad (6)$$

即为柔性机械手单链节构件的运动速度及加速度的递推方程.

3 动力学分析

本节将进一步运用规范原理导出机械手弹性变形运动扩展了的牛顿-欧拉方程. 这里构件弹性位移矢量 $U(x, t) = \Psi a$, 将式(5)代入式(3)得

$$\hat{Q}_j = \hat{O}_j(\hat{\Omega}_j + \hat{\Lambda}_j). \quad (7)$$

将弹性变形单链系统中构件 B_j 的动量旋量按指令的协变导数 $D = d/dt + \hat{V}_j$ 进行协变, 得

$$\hat{O}_j(\hat{\Omega}_j + \hat{\Lambda}_j + \hat{V}_j\hat{\Omega}_j + \hat{V}_j\hat{\Lambda}_j) = \hat{F}_j, \quad (8)$$

此为扩展的牛顿-欧拉方程, 方程主要涉及刚体的运动旋量及弹性变形的速度旋量. 由于采用协变方法, 使刚体的大位移及柔性体小变形的耦合关系得到较好的处理. 也就是使两者作为弱耦合, 按规范理论将物体的运动以规范不变的形式进行协变, 最后从方程中确定了刚体运动与柔性变形的耦合关系.

设 \hat{F}_{G_j} 为 B_j 构件的重力旋量; f_{j+1}, n_{j+1} 为第 B_{j+1} 构件通过关节 O_{j+1} 对 B_j 构件作用的力和力矩; f_{j-1}, n_{j-1} 为第 B_{j-1} 构件通过关节 O_j 对 B_j 构件作用的力和力矩; \hat{F}_{K_j} 为 B_j 构件受到的弹性约束力, 是弹性位移的线性函数; K_e, C_e 分别为结构刚度矩阵及阻尼矩阵; \hat{F}_{C_j} 为 B_j 构件的运动阻尼作用力; 则

$$\begin{aligned} \hat{F}_{K_j} &= K_e a_j, \quad \hat{F}_{C_j} = C_e \dot{a}_j, \quad \hat{F}_{K_{Cj}} = \hat{F}_{K_j} + \hat{F}_{C_j}, \\ \hat{f}_{j+1} &= \begin{bmatrix} f_{j+1} \\ \vdots \\ n_{j+1} \end{bmatrix}, \quad \hat{f}_{j-1} = \begin{bmatrix} f_{j-1} \\ \vdots \\ n_{j-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

作用于 B_j 构件的主动力旋量 \hat{F}_j , 等于与 B_j 构件关联的关节作用力, 加上结构弹性和运动阻尼作用力及该构件的重力相对于 O_j 的旋量, 即

$$\hat{F}_j = \hat{A}'_{(j-1)j}(\hat{f}_{j-1} - \hat{F}_{K_{Cj}}) - \hat{f}_{j+1} + \hat{F}_{G_j}. \quad (9)$$

手部末端外作用力 \hat{f}_{j+1} 由工作力确定, 上面导出的机械手柔性系统的动力学方程, 对于树形柔性多体系统, 可肢解为多个独立的由基体到末端的单链子系统, 该动力学方程仍然适用.

4 逆动力学分析

逆动力学问题便是要求出铰关节控制力旋量 \hat{f}_{j-1} 及微变位 \hat{U}_j , 为此, 设想消除刚体运动与构件弹性变形的耦合, 可以得到刚性构件 B_j 附体坐标系 e_j 原点 O_j 相对于 e_{j-1} 的速度旋量及加速度旋量方程, 即

$$\hat{V}_j = \hat{A}_{(j-1)j}(\hat{V}_{j-1} + \hat{\mu}\dot{q}), \quad (10)$$

$$\hat{V}_j = \hat{A}_{(j-1)j}(\hat{V}_{j-1} - \hat{\mu}\ddot{q}) + \sigma' \hat{A}_{(j-1)j} \hat{V}_{j-1} - \dot{q}, \quad (11)$$

$$\partial \hat{A}'_{(j-1)j} / \partial q_j = \sigma' \hat{A}_{(j-1)j},$$

$$\sigma' = \begin{bmatrix} 0 & \mu_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \mu_j) & 0 & 0 & \mu_j & 0 \\ -(1 - \mu_j) & 0 & 0 & -\mu_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

刚性构件运动的牛顿-欧拉方程为

$$\hat{F}_j = \mathcal{O}_j \dot{\hat{V}}_j + H_j \mathcal{O}_j \hat{V}_j, \quad (12)$$

式中

$$H_j = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_j^3 & \omega_j^2 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_j^3 & 0 & -\omega_j^1 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_j^3 & \omega_j^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_j^3 & \omega_j^2 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_j^3 & 0 & -\omega_j^1 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_j^2 & \omega_j^1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\omega_j^1, \omega_j^2, \omega_j^3$ 为 e_j 的角速度分量. 将式(9)写成手部向内递推的方程, 可得

$$\hat{f}_{j-1} = \hat{A}'_{(j-1)j} (\hat{F}_j + \hat{f}_{j+1} - \hat{F}_{Gj}) + \hat{F}_{KCj}, \quad (13)$$

对于初端固定, 末端自由的单链机械手, 其构件弹性变形为小量, 由虚功率原理可导出二阶线性微分方程为

$$J_j \ddot{\hat{U}}_j + C_j \dot{\hat{U}}_j + K_j \hat{U}_j = \hat{F}_j, \quad (14)$$

式中 J_j 为构件 B_j 对 e_j 的惯量矩阵.

求解控制力旋量 \hat{f}_{j-1} 及微变位 \hat{U}_j 的步骤.

(1) 设机械臂为刚性, 当已知运动副铰关节的广义坐标 q_j 及其导数 $\dot{q}_j, \ddot{q}_j (j=1, 2, \dots, n)$ 时, 应用递推公式(10), (11)可求运动参数 $\hat{V}_j, \dot{\hat{V}}_j, \omega_j, \dot{\omega}_j (j=1, 2, \dots, n)$, 由式(12)确定在刚性模型下作用于 B_j 构件的主动力 \hat{F}_j .

(2) 将主动力旋量 \hat{F}_j 代入方程式(14), 计算出微变位 \hat{U}_j .

(3) 利用已解出的 \hat{U}_j 代入式(5), (6), (8), (13), 最终确定作用于柔性机械臂 B_j 的 \hat{F}_j 和关节控制力旋量 \hat{f}_{j-1} .

(4) 根据已经确定出的控制力(矩)及有关的系统响应信息, 并反复进行步骤(1)~(3)的分析过程, 就可依次递推算出作用于各铰关节的控制力旋量.

例举四关节机器人模型, 如图1所示, 有关参数见文[4]. 在激振力的激励下计入柔性变形, 自由振动分析取2阶正则模态, 动力学响应曲线出测试点分布图参见文[4]. 图中I表示刚体模型响应; II为变形体模型响应. 可以看出, 在考虑构件的柔性变形时, 控制力矩有弹性振动的高频成份.

5 结论

(1) 本文采用规范理论和旋量矩阵相结合的方法来描述柔性机械手的动力学模型, 将物理量中速度、角速度、力和力矩的内在联系融合成一体, 不仅使方程形式简明、系统性强, 而且便于计算.

(2) 对于刚体的大位移与构件的小变形耦合, 由于运用规范理论, 将普通时间导数换成协变时间导数, 从而确定了刚体运动与变形的耦合关系, 使建立的方程具有实用意义.

(3) 所导出的柔性机械手动力学方程是个普遍方程,即使对于树形柔性多体系统,也可肢解为单链子系统,方程仍然适用。

参 考 文 献

- 1 Cannon R H, Schmitz E. Initial experiments on the endpoint control of a flexible one-link robot. The Robotics Research, 1985, (3): 62~75
- 2 刘延柱, 洪嘉振, 杨海兴. 多体系统动力学. 上海: 高等教育出版社, 1989. 182~190
- 3 洪嘉振. 多体系统动力学. 上海: 上海交通大学出版社, 1992. 1~13
- 4 林瑞麟, 郭兴跃, 蒋少茵. 四关节机器人模型动态特性实验分析. 华侨大学学报(自然科学版), 1995, 16(4): 424~427

Dynamic Equation of Flexible Manipulator

Lin Ruilin

(Dept. of Precis. Mech. Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract By applying the method combining gauge theory with spinor matrix, a study is made on the dynamic equation of flexible manipulator. The coupling of rigid motion and elastic deformation is defined. A general dynamic equation applicable also to tree flexible many-body system is given. The equation is concise systematic and easy of computation.

Keywords flexible manipulator, gauge theory, dynamic equation

福建省泉州市汽车运输总公司客运一公司

福建省泉州市汽车运输总公司客运二公司

福建省南平造纸厂

福建省三明市第二纺织厂

热烈祝贺

《华侨大学学报(自然科学版)》荣获

全国高等学校自然科学学报系统优秀学报一等奖

福建省高等学校自然科学学报系统优秀学报一等奖