

薄壁杆件在纯弯下屈曲的样条有限杆元法*

王全凤^① 李华煜^②

(^① 华侨大学土木工程系, 泉州 362011; ^② 香港理工大学土木与结构工程系, 香港)

摘要 根据位移变分原理, 用一个称为样条有限杆元法的综合方法对任意截面形状的薄壁杆件在纯弯下进行屈曲分析, 并提出用一个经过变换的三次 B 样条函数来模拟薄壁杆件横截面的纵向翘曲位移场. 屈曲分析考虑了反映剪力滞后现象的杆壁中面上剪应变的影响, 与经典理论及有限元软件包 COSMOS/M 的结果比较, 本文方法能够灵活、精确和有效地进行薄壁杆的屈曲分析. 数值算例的快速收敛说明了文中数值结果的可靠性.

关键词 样条, 杆元, 屈曲, 薄壁杆, 纯弯

分类号 TU 323. 01

薄壁杆件在高层建筑和大跨度桥梁中的广泛应用使得它的失稳成为一个重要问题. Vlasov^[1]提出了薄壁杆件失稳的简化分析方法, 但剪力滞后在他的方法中没有得到正确反映; 有些简化方法^[2~3]是建立在杆壁中面上无剪应变或剪应变为常数的假定上, 这些方法也不能反映剪力滞后现象. Reissner^[4]和其它一些人^[5~7]研究了剪力滞后现象, 但是他们的方法是建立在假定的翘曲位移函数的基础上. 在众多屈曲分析方法中, 普遍认为有限单元法是最有效的^[8~10], 为了得到有限元的解, 需要进行复杂的数据准备和占用大量 CPU 时间. 因此, 限制了这种方法的应用. 对薄壁结构来说, 有限条带法能大大减少分析结构的自由度^[11]. 但它很难适应各种类型的边界条件. 为了提出一种通用的薄壁杆件屈曲分析的方法, 本文尝试从 3 个方面作出改进.

(1) 尽管 Vlasov 理论对他定义的薄壁杆件是合理的, 但它不能反映剪力滞后现象. 因此, 这个理论对一般杆件不全适用, 在此需要改进.

(2) 对截面有分枝的薄壁杆件, 当采用广义的位移参数时, 常用的样条函数很难保证在杆壁交接处位移的连续. 为了使方法具有普遍性, 本文采用结点实际位移, 而不采用广义结点位移作为计算参数.

(3) 用变换的三次 B 样条函数代替有限杆元法中的局部线性插值函数^[12], 提出了样条有限杆元法.

本文只保留 Vlasov“刚性截面”的假定, 抛弃了他的另一个“杆壁中无剪应变”的假定; 以及采用一个普遍假定: 在截面的切线方向与法线方向上的正应力远比纵向正应力小, 因此在本屈曲分析中可以忽略.

* 本文 1995-09-24 收到; 香港政府大专院校科学研究基金资助项目

1 薄壁杆件能量方程

图1表示任意截面形状的薄壁杆件承受纯弯曲.图中 z 轴是纵轴, x 轴和 y 轴分别是通过截面形心 c 的主轴, s 是沿截面中心线的曲线坐标, H 是杆单元的长度.

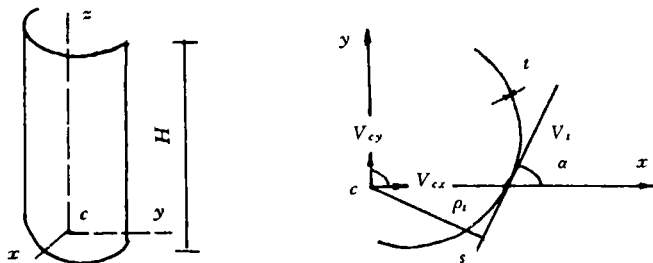


图1 任意截面形状的薄壁杆件

对薄壁杆件,它的总势能是杆件的应变能 U 和荷载势能 V 的和^[13],即

$$\begin{aligned} \Pi = U + V = & \frac{1}{2} \int_0^H \left\{ \int_{\Sigma} \left[E \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 t_0 + G \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial z} \right)^2 t \right] ds + G J_d \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 \right\} dz \\ & - \frac{1}{2} \int_0^H \int_{\Sigma} \sigma_0 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 t_0 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 t + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 t \right] ds dz, \end{aligned} \quad (1)$$

式中,在荷载势能表达式中的非线性项 $(\partial v_x / \partial z)^2$ 和 $(\partial v_y / \partial z)^2$ 分别是由横向位移 v_x 和 v_y 引起的纵向应变; $w(s, z)$ 是沿着 z 方向的截面翘曲位移; v_t 是在点 s 沿着杆截面中心线切线方向的位移; v_x 和 v_y 分别是杆截面上任一点沿 x 和 y 方向的位移; θ 是杆截面的扭转角, E 是弹性模量; G 是剪切模量; J_d 是 St. Venant 扭转常数; Σ 是整个截面长度; t_0 是在点 s 杆壁的实际厚度; t 是开洞杆壁的折算厚度.

根据“刚性截面”假设,杆壁中心线上任一点的切向位移 $v_t = v_{cx} \cos \alpha + v_{cy} \sin \alpha + \rho_t \theta$,式中 α 是 x 轴与过点 s 切线的夹角; ρ_t 是从形心 c 到过 s 点切线的距离; v_{cx} 和 v_{cy} 分别是形心点的位移在 x 方向和 y 方向的分量.写成矩阵形式为

$$v_t = [\eta_i]_{1 \times 3} \{v_c\}_{3 \times 1}, \quad (2)$$

式中 $[\eta_i] = [\cos \alpha \sin \alpha \rho_t]$; $\{v_c\} = [v_{cx} \ v_{cy} \ \theta]^T$.

2 纵向翘曲位移

由于薄壁杆截面的变杂性,特别对截面有分枝的杆件,很难用常用的三次 B 样条函数来正确模拟杆壁分枝点上的纵向位移,需要把三次 B 样条函数加以修正来克服这个缺点^[14].本文用一个变换的三次 B 样条函数来模拟薄壁杆件的纵向翘曲位移.通过变量分离和半离散技术,第 j 个结点纵向翘曲位移 $w_j(s, z)$ 可表达为 $(m+3)$ 个局部三次 B 样条函数之和,即

$$w_j(s, z) = \sum_{i=j-2}^{j+1} \alpha_i(z) \psi_i(s) \quad (s_{j-1} \leq s \leq s_j \quad j = 3, 4, 5, \dots, m+2), \quad (3)$$

式中 α_i 是广义结点位移参数; ψ_i 是一个如图2所示的常用三次 B 样条函数.

$$\psi_i(s) = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} (s - s_i + 2h)^3 & [s_{i-2}, s_{i-1}], \\ (s - s_i + 2h)^3 - 4(s - s_i + h)^3 & [s_{i-1}, s_i], \\ (s_i + 2h - s)^3 - 4(s_i + h - s)^3 & [s_i, s_{i+1}], \\ (s_i + 2h - s)^3 & [s_{i+1}, s_{i+2}], \end{cases} \quad (4)$$

式中 s 是结点的曲线坐标, h 是分块的子区间长度, 且 $h = s_{i+1} - s_i$; m 如图 3 所示, 把横截面分成相等或不等的若干块中的任意等分的区间数. 假设 w_i 是分块中的真正结点位移, 即

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \partial(s_2, z)/\partial z, \cdots w_2 = w(s_2, z), w_i = w(s_i, z), \cdots, \\ w_{m+2} &= w(s_{m+2}, z), w_{m+3} = \partial w(s_{m+2}, z)/\partial z, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中 s_2 和 s_{m+2} 分别是分块中初结点和末结点的曲线坐标. 从式(3)~(5)可得到

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{2h}(\alpha_3 - \alpha_1) \cdots, w_i = \frac{1}{6}(\alpha_{i-1} + 4\alpha_i + \alpha_{i+1}) \cdots, \\ w_{m+3} &= \frac{1}{2h}(\alpha_{m+3} - \alpha_{m+1}) \quad i = 2, 3, \cdots, m+2. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

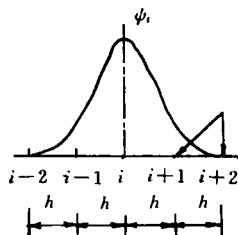


图 2 等区间长度的三次 B 样条函数

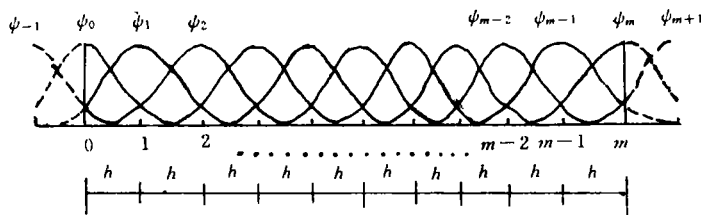


图 3 分块的子区间

用 Maple v 软件包^[15]求解上述方程组, 把原有的样条函数的广义结点位移参数用实际的结点位移表达, 即

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{m+3} b_{ik} w_k \quad (i = 1, 2, \cdots, m+3), \quad (7)$$

式中 b_{ik} 是用 Maple v 软件包计算出来系数. 把上式代进式(4), 给出

$$\begin{aligned} w_j(s, z) &= \sum_{k=1}^{m+3} \left[\sum_{i=j-2}^{j+1} b_{ik} \psi_i(s) \right] w_k(z) \\ &= \sum_{k=1}^{m+3} \bar{\psi}_{jk}(s) w_k(z) \quad (s_{j-1} \leq s \leq s_j \quad j = 3, 4, \cdots, m+2), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{式中} \quad \bar{\psi}_{jk}(s) = \sum_{i=j-2}^{j+1} b_{ik} \psi_i(s) \quad (s_{j-1} \leq s \leq s_j \quad j = 3, 4, \cdots, m+2), \quad (9)$$

称为变换的三次 B 样条函数, 它是由 4 个常用的三次 B 样条函数 $\psi(s)$ 组成. 因为每块中变换样条函数的位移参数, 包括两端的 4 个都是实际的结点位移参数, 它克服了常用的样条函数在模拟截面带有分肢杆件翘曲位移时的困难. 又因为截面的每 1 个分块都由 1 个变换的样条函数内插, 而且每 1 个变换样条函数只是与这 1 块的结点位移有关, 所以每一块都能自成一体. 这类似于有限单元法中的单元分析. 整个截面的系数矩阵类似于有限单元法中的整体分析, 可装配而成. 这样, 整个截面的纵向翘曲位移可由任意几个分块样条函数来描述, 每个分块样条结点等距划分, 但不同分块内的结点数可以不同, 这是一个十分灵活的样条函数插值系统. 采用分块样条插值, 整个截面的纵向翘曲位移为

$$w(s, z) = \sum_{i=1}^n \bar{\psi}_i(s) w_i(z) = [\bar{\psi}]_{1 \times n} \{w\}_{n \times 1}, \quad (10)$$

式中 n 是整个截面内插结点总数, $[\bar{\psi}]_{1 \times n} = [\bar{\psi}_1(s), \bar{\psi}_2(s), \cdots, \bar{\psi}_n(s)]$; $\{w\}_{n \times 1} = [w_1(z), w_2(z), \cdots, w_n(z)]^T$.

3 薄壁杆的屈曲分析

假设 x 轴和 y 轴是通过截面形心 c 的主轴,则下面关系式成立,即 $v_x = v_{cx} - y\theta$, $v_y = v_{cy} + x\theta$. 把式(2), (10)和上式代进式(1),得

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^H (E(\{w'\}^T[A]\{w'\} + G\{w\}^T[B]\{w\} + 2G\{w\}^T[C]\{v'_c\} \\ & + G\{v'_c\}^T[D_c]\{v'_c\} + G\{\theta'\}^T J_d \{\theta'\}) dz \\ & - \frac{1}{2} \int_0^H [\{w'\}^T[T_{c1}]\{w'\} + \{v'_c\}^T \int_{\Sigma} \sigma_0 [T_{\sigma}] t ds \{v'_c\}] dz, \end{aligned} \quad (11)$$

式中函数上标“ $'$ ”表示对这一函数的一阶导数,以及 $[A]_{n \times n} = \int_{\Sigma} [\psi]^T [\psi] t ds$; $[B]_{n \times n} = \int_{\Sigma} [\psi']^T [\psi'] t ds$; $[C]_{n \times 3} = \int_{\Sigma} [\psi']^T [\eta_i] t ds$; $[D_c]_{3 \times 3} = \int_{\Sigma} [\eta_i]^T [\eta_i] t ds$; $[T_{\sigma}]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & x \\ -y & x & x^2 + y^2 \end{bmatrix}$; $[T_{c1}]_{n \times n} = \int_{\Sigma} \sigma_0 [\psi]^T [\psi] t ds$. 当 $y-z$ 平面内的力偶施加在杆端时, $\sigma_0 =$

$M_x y / I_x$, 式中 M_x 为施加的力偶; I_x 为截面对惯性主轴 x 轴的惯性矩. 对整个截面积分, 以及注意到 x 轴和 y 轴是通过截面形心的主轴, 则

$$\int_{\Sigma} \sigma_0 [T_{\sigma}] t ds = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -M_x \\ 0 & 0 & 0 \\ -M_x & 0 & M_m \end{bmatrix} = [T_{c2}]_{3 \times 3},$$

式中 $M_m = \frac{M_x}{I_x} \int_{\Sigma} y(x^2 + y^2) t ds$; 参照式(12), 荷载势能为

$$V = - \frac{1}{2} \int_0^H \{ \{v'_c\}^T [T_{c2}] \{v'_c\} + \{w'\}^T [T_{c1}] \{w'\} \} dz. \quad (12)$$

根据变分原理, 对式(11)中 $\{w\}$ 和 $\{v_c\}$ 分别进行一阶变分, 以及利用如分部积分等一些常用技术, 可得到下面的常微分方程组及其边界条件, 即

$$E[A]_{n \times n} \{w''\}_{n \times 1} - G[B]_{n \times n} \{w\}_{n \times 1} - G[C]_{n \times 3} \{v'_c\}_{3 \times 1} - [T_{c1}]_{n \times n} \{w''\}_{n \times 1} = \{0\}_{n \times 1}, \quad (13a)$$

$$G([C]^T)_{3 \times n} \{w'\}_{n \times 1} + G[D]_{3 \times 3} \{v''_c\}_{3 \times 1} - [T_{c2}]_{3 \times 3} \{v''_c\}_{3 \times 1} = \{0\}_{3 \times 1}; \quad (13b)$$

$$E[A]_{n \times n} \{w'\}_{n \times 1} - [T_{c1}]_{n \times n} \{w'\}_{n \times 1} = \{0\}_{n \times 1}, \quad (14a)$$

$$G([C]^T)_{3 \times n} \{w\}_{n \times 1} + G[D]_{3 \times 3} \{v'_c\}_{3 \times 1} - [T_{c2}]_{3 \times 3} \{v'_c\}_{3 \times 1} = \{0\}_{3 \times 1}; \quad (14b)$$

式中 函数上标“ $''$ ”表示该函数对 z 的二阶导数, 且

$$[D]_{3 \times 3} = [D_c]_{3 \times 3} + J_d \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

从式(13b), 可得

$$\{v'_c\}_{3 \times 1} = - (G[D]_{3 \times 3} - [T_{c2}]_{3 \times 3})^{-1} G[C]_{3 \times n}^T \{w\}_{n \times 1} + \{v_0\}_{3 \times 1}, \quad (15)$$

式中 $\{v_0\}$ 是任意积分常数向量. 把上式代进式(13a), 整理得

$$\begin{aligned} E[A]_{n \times n} \{w''\}_{n \times 1} - G([B]_{n \times n} - [C]_{n \times 3} [D]_{3 \times 3}^{-1} [C]_{3 \times n}^T) \{w\}_{n \times 1} \\ = G^2 [C]_{n \times 3} [T_{c2}]_{3 \times 3}^{-1} [C]_{3 \times n}^T \{w\}_{n \times 1} + [T_{c1}]_{n \times n} \{w''\}_{n \times 1} + G[C]_{3 \times n} \{v_0\}_{3 \times 1}, \end{aligned} \quad (16)$$

上式就是用位移变分法推导出薄壁杆在纯弯状态下的稳定特征方程。

4 稳定特征方程的解

杆元两端的位移可用矩阵表达为

$$\{w_E\}_{(2n+6) \times 1} = [v_{1x}, v_{1y}, \theta_1, w_{11}, w_{12}, \dots, w_{1n}, v_{2x}, v_{2y}, \theta_2, w_{21}, w_{22}, \dots, w_{2n}]^T, \quad (17)$$

式中 变量的第 1 个脚标 1 或 2 分别表示杆元始端或终端的截面; v_{1x} 表示在始端沿着 x 方向截面的位移; w_{11} 表示在始端第一个结点上的纵向位移; \dots 注意 n 是一个任意选择的结点数, 通过它们截面被分成相等或不等的子区间来满足不同形状截面的精度要求. 把式(17)改写为屈曲分析有限元刚度方程的标准形式, 即

$$([K] + [K_G])_{(2n+6) \times (2n+6)} \{w_E\}_{(2n+6) \times 1} = \{0\}_{(2n+6) \times 1}, \quad (18)$$

式中 $[K_G]$ 是非线性的几何刚度矩阵, 它可从荷载势能推导而得; $[K]$ 是线性应变刚度矩阵, 它可在式(16)中令 $\sigma_0 = 0$, 得到下式推导而来.

$$E[A]_{n \times n} \{w''\}_{n \times 1} - G[\bar{B}]_{n \times n} \{w\}_{n \times 1} = G[C]_{n \times 3} \{v_0\}_{3 \times 1}, \quad (19)$$

式中 $[\bar{B}]_{n \times n} = [B]_{n \times n} - [C]_{n \times 3} [D]_{3 \times 3}^{-1} [C]_{3 \times n}^T$. 假设 $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ 为特征方程

$$\Lambda [A]_{n \times n} \{a\}_{n \times 1} - [\bar{B}]_{n \times n} \{a\}_{n \times 1} = \{0\}_{n \times 1} \quad (20)$$

的特征值, 并定义一个变换

$$\{w\}_{n \times 1} = [a]_{n \times n} \{U\}_{n \times 1}, \quad (21)$$

式中 $\{a_i\}$ 是特征向量, $[a] = [\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_n\}]$; $\{U\} = [U_1, U_2, \dots, U_n]^T$. 把式(21)代进式(19), 以及利用特征向量的正交性, 下面的关系式成立, 即

$$\frac{E}{G} [I]_{n \times n} \{U''\}_{n \times 1} - \begin{bmatrix} \Lambda_1 & & 0 \\ & \Lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \Lambda_n \end{bmatrix}_{n \times n} \{U\}_{n \times 1} = \{U_0\}_{n \times 1}, \quad (22)$$

式中 $[I]$ 是单位阵, 以及 $\{U_0\}_{n \times 1} = [a]_{n \times n}^T [C]_{n \times 3} \{v_0\}_{3 \times 1}$. 与式(20)解的可能特征值相对应, 广义特征值问题 $\Lambda_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, n)$, 其中零特征值数目等于系统刚体位移模式的数目^[16]. 不失一般性, 令 $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = 0$, 则式(22)的前 3 个解和其余解分别为 $U_i = \frac{G}{E} U_{0i} \frac{z^2}{2} + \underline{C}_{i1} z + \underline{C}_{i2}$

($i=1, 2, 3$), $U_i = \underline{C}_{i1} e^{-\lambda_i \xi} + \underline{C}_{i2} e^{-\lambda_i \eta} - \frac{1}{\Lambda_i} U_{0i} (i \geq 4)$, 式中 $\eta = z/H$, $\xi = 1 - \eta$, $\lambda_i = H \sqrt{G \Lambda_i / E}$. 记

$$[R_0]_{n \times n} = \begin{bmatrix} z^2/2 & & & & \\ & z^2/2 & & & \\ & & z^2/2 & & \\ & & & -E/(\Lambda_4 G) & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & E/(\Lambda_n G) \end{bmatrix},$$

$$[R]_{n \times 2n} = \begin{bmatrix} z, 1 & & & & \\ & z, 1 & & & \\ & & z, 1 & & \\ & & & e^{-\lambda_4 \xi}, e^{-\lambda_4 \eta} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & e^{-\lambda_n \xi}, e^{-\lambda_n \eta} \end{bmatrix},$$

$\{C\}_{2n \times 1} = [\underline{C}_{11}, \underline{C}_{12}, \underline{C}_{21}, \underline{C}_{22}, \dots, \underline{C}_{n1}, \underline{C}_{n2}]^T$, 则式(23)的解可改写为

$$\{U\}_{n \times 1} = \frac{G}{E} [R_0]_{n \times n} [a]_{n \times n}^T [C]_{n \times 3} \{v_0\}_{3 \times 1} + [R]_{n \times 2n} [\underline{C}]_{2n \times 1}, \quad (23)$$

把上式代进式(21)及利用式(15),得

$$\begin{Bmatrix} v_c \\ w \end{Bmatrix}_{(3+n) \times 1} = \begin{bmatrix} [T_v(z)]_{3 \times (2n+6)} \\ [a]_{n \times n} [T_w(z)]_{n \times (2n+6)} \end{bmatrix} \{\bar{C}\}_{(2n+6) \times 1}, \quad (24)$$

式中 $[T_v(z)]_{3 \times (2n+6)} = [-[D]_{3 \times 3}^{-1} [C]_{3 \times n}^T [a]_{n \times n} \int_0^z [R_0]_{n \times n} dz [a]_{n \times n}^T [C]_{n \times 3} + z \frac{G}{E} [I]_{3 \times 3}, [I]_{3 \times 3},$
 $- [D]_{3 \times 3}^{-1} [C]_{3 \times n}^T [a]_{n \times n} \int_0^z [R]_{n \times 2n} dz]; [T_w(z)]_{n \times (2n+6)} = [[R_0]_{n \times n} [a]_{n \times n}^T [C]_{n \times 3}, [0]_{n \times 3},$
 $[R]_{n \times 2n}]; \{\bar{C}\}_{(2n+6) \times 1} = [\frac{G}{E} \{v_0\}_{3 \times 1}, \{v_1\}_{1 \times 3}, \{\underline{C}\}_{1 \times 2n}]^T.$

在向量 $\{\bar{C}\}$ 中, $\{v_1\}$ 是任意积分常数向量. 根据杆端的边界条件, 可形成一组方程求得向量 $\{\bar{C}\}$, 即从式(17)和式(24), 得

$$\{W_E\}_{(2n+6) \times 1} = [T_E]_{(2n+6) \times (2n+6)} \{\bar{C}\}_{(2n+6) \times 1}, \quad (25)$$

$$\text{式中 } [T_E]_{(2n+6) \times (2n+6)} = \begin{bmatrix} [T_v(0)]_{3 \times (2n+6)} \\ [a]_{n \times n} [T_w(0)]_{n \times (2n+6)} \\ [T_v(H)]_{3 \times (2n+6)} \\ [a]_{n \times n} [T_w(H)]_{n \times (2n+6)} \end{bmatrix},$$

从式(25), 可得

$$\{\bar{C}\}_{(2n+6) \times 1} = [T_E]_{(2n+6) \times (2n+6)}^{-1} \{W_E\}_{(2n+6) \times 1}. \quad (26)$$

回代式(24), 则下式就是以杆元两端位移表示的杆元中任一点位移的表达式, 即

$$\begin{Bmatrix} v_c \\ w \end{Bmatrix}_{(n+3) \times 1} = \begin{bmatrix} [T_v(z)]_{3 \times (2n+6)} \\ [a]_{n \times n} [T_w(z)]_{n \times (2n+6)} \end{bmatrix} [T_E]_{(2n+6) \times (2n+6)}^{-1} \{W_E\}_{(2n+6) \times 1}, \quad (27)$$

依推导有限单元法刚度矩阵步骤可得杆元的线性应变刚度矩阵 $[K]$. 上式代入式(12), 得

$$V = -\frac{1}{2} \{W_E\}_{1 \times (2n+6)}^T [K_G]_{(2n+6) \times (2n+6)} \{W_E\}_{(2n+6) \times 1}, \quad (28)$$

$$[K_G]_{(2n+6) \times (2n+6)} = ([T_E]^{-1})_{(2n+6) \times (2n+6)} \int_0^H ([T'_v(z)]_{2n+6 \times 3}^T [T_{c1}]_{3 \times 3} [T'_v(z)]_{3 \times (2n+6)} + [T'_w(z)]_{n \times (2n+6)}^T [a]_{n \times n}^T [T_{c2}]_{n \times n} [a]_{n \times n} [T'_w(z)]_{n \times (2n+6)}) dz [T_E]_{(2n+6) \times (2n+6)}^{-1}. \quad (29)$$

5 数值例子

用本文的方法对图4所示的3种截面形状的悬臂薄壁杆件进行纯弯状态下的屈曲分析.

例1 如图4a所示的T型截面的悬臂薄壁杆件. $E=10^6 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-2}$; 泊松比 $\nu=0.25$; $t=0.4 \text{ m}$; 杆件长度分别为 40 m , 30 m , 20 m , 10 m 和 5 m 五种. 本文的结果 M_{cr1} 与经典的结果 $M_{cr2}^{(17)}$ 比较在表1. 从表1可看到, 这两种不同的方法得到的结果吻合的很好.

例2 如图4b所示的箱型截面的薄壁杆件. $E=10^6 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-2}$; $\nu=0.25$; $t=0.2 \text{ m}$; 悬臂杆件的长度分别是 40 m , 30 m , 20 m , 10 m 和 5 m . 利用 Umanskii 理论⁽¹⁸⁾ 屈曲分析的结果 M_{cr3} 与本文分析的结果 M_{cr1} 综合在表2.

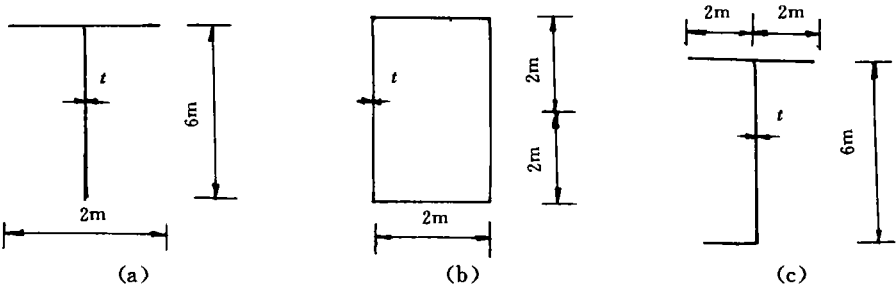


图 4 薄壁杆件的截面形状
表 1 例 1 结果的比较^①

R	20	15	10	5	2.5
$M_{cr2}/N \cdot m$	4 353.36	5 443.47	7 204.76	10 258.9	12 274.6
$M_{cr1}/N \cdot m$	4 353.02	5 438.44	7 187.36	10 202.6	12 176.4
M_{cr1}/M_{cr2}	0.999 9	0.999 1	0.997 6	0.994 5	0.992 0

① 表中 R 是薄壁杆件的细长比

表 2 例 2 结果的比较

R	20	15	10	5	2.5
$M_{cr3}/N \cdot m$	70 654.7	94 664.7	143 400.	292 303.	589 495.
$M_{cr1}/N \cdot m$	67 671.9	88 799.3	128 707.	229 722.	364 655.
M_{cr1}/M_{cr3}	0.957 8	0.938 0	0.897 5	0.785 9	0.618 6

从表 2 比较可以看出,对于 Vlasov 定义的闭口薄壁杆件,本文的方法也是有效和精确的.从表中还可以看出,在比较小的杆件细长比情况下,两种方法得到的结果有明显的不同,原因是前者没有正确反映剪力滞后现象.比较例 1 和例 2 可以看出,在小的细长比情况下,闭口薄壁杆件比开口薄壁杆件剪力滞后现象大得多,原因是前者杆件中剪力形成一个闭合流.

例 3 图 4c 为不规则工字型截面薄壁杆件的屈曲分析. $E=10^6 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-2}$; $G/E=0.4$; $t=0.2 \text{ m}$; 悬臂杆件的长度分别是 120 m, 90 m, 60 m, 30 m 和 15 m. 本文得到的数值结果 M_{cr1} 与有限单元软件包 COSMOS/M 的结果 $M_{cr4}^{(19)}$ 比较在表 3.

表 3 例 3 结果的比较

R	20	15	10	5	2.5
$M_{cr4}/N \cdot m$	396.60	546.00	932.79	2 892.73	10 577.2
$M_{cr1}/N \cdot m$	380.67	534.66	936.14	2 988.35	10 763.2
M_{cr1}/M_{cr4}	0.959 8	0.979 2	1.003 6	1.033 1	1.017 6

对不规则工字型截面的壁杆件,无现成的例子可对比,只好用“COSMOS/M”有限元分析程序计算同一杆件以进行比较.从表 3 可以看出,用这两种不同的方法得到的结果是很接近的,但本文的方法比“COSMOS/M”省很多计算时间,其中包括数据准备时间.

6 收敛性研究

特征值和特征向量解法的一个重要方面是要估计出所求得特征系的精度.因一个特征系的解法须迭代,只要它收敛于规定的允许范围内,即可终止求解过程.本文用例 3 来探讨薄壁杆件临界弯矩 M_{cr} 随沿长度方向划分杆元数 e 的增加所引起的收敛速度的变化(见表 4).

表 4 杆件的单元数对 M_{cr} 的影响

H/m	120	90	60	30	15
$e=4$	380.667	534.657	936.138	2 988.350	10 763.18
$e=3$	380.734	534.733	936.256	2 988.828	10 766.64
$e=2$	381.100	535.144	936.855	2 990.896	10 779.11
$e=1$	386.572	541.422	945.852	3 017.248	10 897.54

表 4 表明不规则工字型截面的悬壁薄壁杆件的屈曲解是快速收敛的. 只要薄壁杆件沿着长度方向划分很少几个杆元就能取得收敛的效果.

7 结论

根据位移变分原理, 一个综合的方法(样条有限杆元法)被提出来对具有任意截面形状的薄壁构件在纯弯状态下进行屈曲分析. 根据本文的分析, 可以得出下面一些结论.

(1) 本文的方法由于考虑了剪力滞后现象, 扩大了应用范围. 它可用于任意截面形状薄壁杆件在任意边界条件下的屈曲分析.

(2) 用变换的三次 B 样条函数来模拟薄壁杆件截面的纵向翘曲位移. 利用这个样条函数作为插值函数, 截面可被分为等长或不等长的块去满足不同的需要. 这样由整截面的样条插值改为分块插值, 解决了截面有分肢的问题, 增加了方法的灵活性.

(3) 因为本文方法没有涉及到剪力中心和扇性坐标的概念, 故它容易被理解和掌握.

(4) 从本文的数值结果与经典理论和标准的有限单元法结果比较看, 本文的分析方法是精确和有效的, 且有灵活性. 与有限单元法相比, 还可省许多计算时间及减少数据文件准备的工作量.

(5) 本文数值结果的快速收敛, 说明本文结果的可靠性.

(6) 作为一种薄壁杆件屈曲分析的一般方法, 薄壁杆件中面上的剪应变对屈曲荷载的影响应该考虑. 对那些有比较小细长比的杆件, 这个影响可能是大的.

参 考 文 献

1 Vlasov V Z. Thin-walled elastic beams. 2nd Ed. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1961. 357~397

2 Timoshenko S P, Gere J M. Theory of elastic stability, 2nd Ed. New York: McGraw-Hill Book Co., 1961. 77~181

3 Benscoter S U. A theory of torsion bending for mulit-cell beams, J. Appl. Mech., ASME, 1954, 21: 25~34

4 Reissner E. Analysis of shear lag in box beams by the principle of minimum potential energy. Q. Appl. Math., 1946, (4): 268~278

5 Coull A, Bose B. Simplified analysis of framed-tube structures. J. of struct. div., ASCE, 1975, 101: 2223~2240

6 Coull A, Bose B. Torsion of framed-tube structures. J. of struct. div., ASCE, 1976, 102: 2366~2370

7 Rosman R. Torsion of perforated concrete shafts. In: ASCE J. of Struct. Div., Proc. 1969, 95: 99~110

8 Gelin S, Lee G C. Finite element analysis of thin-walled structures; Finite element availadle for the anal-

- ysis of non-curved thin-walled structures. London: Elsevier Applied Science, 1988. 1~117
- 9 Barsoum R S, Gallagher R H. Finite element analysis of torsional-flexural stability problems. *Internat. J. of Numerical Methods in Engrg.*, 1977, (2): 335~352
 - 10 Kraicinovic D. A consisted discrete element technique for thin-walled assemblages, *Internat. J. of solid And Structures*, 1969, (5): 639~662
 - 11 Hancock G J, Davids A J, Key P W, et al. Recent developments in the buckling and nonlinear analysis of thin-walled structural members. *J. Thin-Walled Structures*, 1990, (9): 309~338
 - 12 吴修水, 考虑剪切变形的薄壁杆件分析. *工程力学*, 1993, 10(1): 76~84
 - 13 Li W Y, Wu X S. A semi-discrete method for shear lag analysis of thin-walled members. *Proc. of Asian Pacific Conference on Computational Methods*, 1991, (1): 73~79
 - 14 李华煜, 辛克贵. 采用分段样条插值的半离散方法分析薄壁杆件. *工程力学*, 1992, 9(3): 8~22
 - 15 Bruce W C, Keith O G, et al. *Maple language reference manual*. Waterloo: Waterloo Maple Publishing, 1991. 1~297
 - 16 Bathe K J, Wilson E L. *Numerical methods in finite element analysis*. Englewood: Cliffs Printice-Hall, Inc., 1976. 437~438
 - 17 Xia Z, Pan A. *Theory of structural stability*, 2nd Ed. Beijing: Advanced Education Press, 1988. 183~186
 - 18 Bao S H, Zhou J. *Structural mechanics in thin-walled members*. Beijing: China Building Industry Press, 1991. 293~325
 - 19 Lashkari M. *COSMOS/M Uuer's guide*. California: Structural Tesearch and Analysis Corporation, 1988. 1~393

Spline Finite Member Element Method for Analysing the Buckling of Thin-Walled Member under Pure Bending

Wang Quanfeng^① Li Huayu^②

(① Dept. of Civil Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou;

② Dept. of Civil and Struct. Eng., The Hong Kong Polytechnic Univ., Hong Kong)

Abstract Based on displacement variational principle, a comprehensive method known as spline finite member element method is used for analysing the buckling of thin-walled member with arbitrary section. A transformed B_3 -spline function is presented for simulating the longitudinal warping displacement field along the cross-section of thin-walled member. The effect of shearing strain of the middle surface, which reflect shearing lag, has been taken into account during buckling analysis. As compared with the results from classical theory and finite element software package COSMOS/M, this is a flexible, accurate, and effective method for the buckling analysis of thin-walled member. The fast convergence of numerical examples account for the reliability of its numerical results.

Keywords spline, member element, buckling, thin-walled member, pure bending