

# 混合超图的星染色\*

王 志 雄

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

**摘要** 研究混合超图的各种星染色方式及其性质, 比较它们之间的关系以及它们与一般超图的染色、星染色的关系, 并给出若干类不可染色图.

**关键词** 超图, 子集类, 集合, 染色

**分类号** O 157.5

设  $X$  是有限(非空)集合,  $A$  与  $E$  是  $X$  的两个子集类, 称  $H=(X; A, E)$  为一混合超图. 这里, 子集类  $A$  或  $E$  允许为空类, 且  $A$  与  $E$  也不一定是互斥的. 集合  $X$  中的元素称为是超图  $H$  的顶点, 类  $A$  与  $E$  中的子集分别称为是超图  $H$  的反边与边. 本文只考虑无环的混合超图, 即对任何  $S \in A \cup E$ , 子集  $S$  的元素个数  $|S| \geq 2$ . 若  $A = \Phi$ , 则  $H$  为通常的超图; 进而, 若对任何  $S \in A \cup E = E$ ,  $|S| = 2$ , 则  $H$  为通常的图. 反边  $S = \{u_1, \dots, u_r\} \in A$ , 它反映了元素  $u_1, \dots, u_r$  之间具有某种整体的协同、调和性质; 边  $S = \{v_1, \dots, v_t\} \in E$ , 它则反映了元素  $v_1, \dots, v_t$  之间具有某种互斥、排他性质. 从这个意义上说, 混合超图比一般的超图, 特别是比一般的图, 能够更全面地反映了元素之间的复杂关系. 对这种复杂关系进行量化研究是通过星染色实现的.

## 1 混合超图的星染色

图的星染色是 Vince 于 1988 年首先引用的, 它推广了图的正常染色, 广泛地应用于周期安排问题<sup>[1]</sup>. 混合超图的染色概念是 Voloshin 于 1993 年首先提出的<sup>[2]</sup>, 它推广了一般的超图染色<sup>[3]</sup>. 上述概念的定义都显得如此自然, 似乎别无其他选择. 把星染色概念进一步推广, 引伸到混合超图中, 情况就要复杂得多.

集合  $\{0, 1, \dots, k-1\}$  记为  $\langle k \rangle$ , 集合  $\langle k \rangle$  中元素  $x, y$  的距离  $|x-y|_k$  定义为  $\min\{|x-y|, k-|x-y|\}$ . 显然, 对任何  $x, y \in \langle k \rangle$ ,  $0 \leq |x-y|_k \leq k/2$ .

设  $k, d$  为正整数,  $k \geq 2d$ , 对集合  $S$  到  $\langle k \rangle$  的映射  $c$ , 考虑如下六条性质.

A1 存在  $u, v \in S$ , 使得  $u \neq v$ ,  $|c(u) - c(v)|_k < d$ .

A2 对任何  $u, v \in S$ , 恒有  $|c(u) - c(v)|_k < d$ .

A3 存在  $u, v \in S$ , 使得  $u \neq v$ ,  $c(u) = c(v)$ ; 且对任何  $u, v \in S$ , 恒有  $|c(u) - c(v)|_k < d$ .

E1 存在  $u, v \in S$ , 使得  $|c(u) - c(v)|_k \geq d$ .

\* 本文 1995-11-23 收到; 福建省自然科学基金会资助项目

E2 存在  $u, v \in S$ , 使得  $c(u) \neq c(v)$ ; 且若  $c(u) \neq c(v)$  ( $u, v \in S$ ), 则  $|c(u) - c(v)|_k \geq d$ .

E3 对任何  $u, v \in S, u \neq v$ , 恒有  $|c(u) - c(v)|_k \geq d$ .

当  $d=1$  时, 性质 A2 与 A3 一致, 性质 E1 与 E2 一致.

定义 1 混合超图  $H=(X; A, E)$  的一个  $i$ - $j$  型  $(k, d)$ -星染色, 指的是  $X$  到  $\langle k \rangle$  的一个映射  $c$ , 使得对  $A$  与  $E$  中的每一个子集  $S$ , 在映射  $c$  之下分别具有性质  $A_i$  与  $E_j$ .

根据这个定义, 当  $d=1$  时, 1-1 型(1-2 型)  $(k, 1)$ -星染色即混合超图的正常染色<sup>[2]</sup>.

定义 2 混合超图  $H=(X; A, E)$  若存在  $i$ - $j$  型  $(k, d)$ -星染色,  $k/d$  之下确界称为是混合超图  $H$  的  $i$ - $j$  型星色数, 记为  $\chi_{ij}^*(H)$ . 若对任何正整数  $k, d$ , 不存在  $i$ - $j$  型  $(k, d)$ -星染色, 约定  $\chi_{ij}^*(H) = +\infty$ .

## 2 各种星染色的性质

定理 1 若存在  $S \in A \cap E, |S|=2$ , 则混合超图  $H=(X; A, E)$  不存在任何  $i$ - $j$  型星染色 ( $i, j=1, 2, 3$ ).

证 设  $S=\{u, v\}$ . 若  $H$  有  $i$ - $j$  型星染色  $c$ , 由性质  $A_i, |c(u) - c(v)|_k < d$ ; 由性质  $E_j, |c(u) - c(v)|_k \geq d$ ; 矛盾.

定理 2 若存在  $S \in A \cap E, |S| \geq 3$ , 则混合超图  $H=(X; A, E)$  不存在 1-3 型、2- $j$  型、3- $j$  型 ( $j=1, 2, 3$ ) 星染色.

证 如定理 1.

定理 3 若存在  $S_1 \in A, S_2 \in E$ , 使得  $S_1 \subset S_2$ , 则混合超图  $H=(X; A, E)$  不存在  $i$ -3 ( $i=1, 2, 3$ ) 型星染色.

证 设  $S_1=\{u_1, \dots, u_r\}, S_2=\{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_t\}$ . 若图  $H$  有  $i$ -3 型  $(k, d)$ -星染色  $c$ , 由性质 E3, 对任何  $p, q (1 \leq p < q \leq r), |c(u_p) - c(u_q)|_k \geq d$ , 故性质  $A_1, A_2, A_3$  恒不成立, 矛盾.

定理 4 若存在  $S_1 \in A, S_2 \in E$ , 使得  $S_2 \subset S_1$ , 则混合超图  $H=(X; A, E)$  不存在  $i$ - $j$  型星染色 ( $i=2, 3; j=1, 2, 3$ ).

证 如定理 3.

定理 5 若存在  $S \in E$ , 使得  $S$  的任一个二元子集含在类  $A$  中, 则混合超图  $H=(X; A, E)$  不存在  $i$ - $j$  型星染色 ( $i=1, 2, 3; j=1, 2, 3$ ).

证 否则, 若图  $H$  有  $i$ - $j$  型  $(k, d)$ -星染色  $c$ , 由性质  $A_i$ , 对  $S$  的任两个元素  $u, v$ , 恒有  $|c(u) - c(v)|_k < d$ , 故性质  $E_j$  不成立, 矛盾.

定理 6 若存在  $S \in A$ , 使得  $S$  的任一个二元子集含在类  $E$  中, 则混合超图  $H=(X; A, E)$  不存在  $i$ - $j$  型星染色 ( $i=1, 2, 3; j=1, 2, 3$ ).

证 如定理 5.

定理 7 若存在  $S_1 \in A, S_2 \in A$ , 使得  $S_1 \subset S_2$ , 则  $c$  是混合超图  $H=(X; A, E)$  的 1- $j$  型  $(k, d)$ -星染色, 当且仅当  $c$  是混合超图  $H'=(X; A \setminus \{S_2\}, E)$  的 1- $j$  型  $(k, d)$ -星染色;  $c$  是混合超图  $H=(X; A, E)$  的 2- $j$  型  $(k, d)$ -星染色, 当且仅当  $c$  是混合超图  $H''=(X; A - \{S_1\}, E)$  的 2- $j$  型  $(k, d)$ -星染色, 其中  $j=1, 2, 3$ .

证 因为对映射  $c$ , 子集  $S_1$  满足性质  $A_1$ , 则子集  $S_2$  也满足性质  $A_1$ ; 子集  $S_2$  满足性质

A2, 则子集  $S_1$  也满足性质 A2; 故得结论.

**定理 8** 若存在  $S_1 \in E, S_2 \in E$ , 使得  $S_1 \subset S_2$ , 则  $c$  是混合超图  $H = (X; A, E)$  的  $i-1$  型  $(k, d)$ -星染色, 当且仅当  $c$  是混合超图  $H' = (X; A, E \setminus \{S_2\})$  的  $i-1$  型  $(k, d)$ -星染色;  $c$  是  $H$  的  $i-3$  型  $(k, d)$ -星染色, 当且仅当  $c$  是  $H'' = (X; A, E \setminus \{S_1\})$  的  $i-3$  型  $(k, d)$ -星染色, 其中,  $i=1, 2, 3$ .

证 如定理 7.

**定理 9** 若  $\{x_r, x_i\} \in A, \{x_r, x_i\} \in E$ , 令  $X' = X \setminus \{x_r, x_i\} \cup \{y\}$ ; 对任何  $S \in A \cup E$ , 有

$$f(S) = \begin{cases} S \setminus \{x_r, x_i\} \cup \{y\}, & \text{当 } x_r, x_i \in S, \\ S, & \text{当 } x_r, x_i \notin S, \end{cases}$$

$$E' = \{f(S); S \in E\},$$

$$A' = \{f(S); S \in A, S \neq \{x_r, x_i\}\},$$

则图  $H = (X; A, E)$  存在  $3-j$  型  $(k, d)$ -星染色, 当且仅当  $H' = (X'; A', E')$  存在  $3-j$  型  $(k, d)$ -星染色 ( $j=1, 2, 3$ ), 且它们的星染色是 1-1 对应的.

证 若  $c$  是图  $H = (X; A, E)$  的  $3-j$  型  $(k, d)$ -星染色, 由性质 A3,  $c(x_r) = c(x_i)$ , 令

$$c'(v) = \begin{cases} c(v), & \text{当 } v \neq y, \\ c(x_r), & \text{当 } v = y, \end{cases}$$

则  $c'$  是图  $H'$  的  $3-j$  型  $(k, d)$ -星染色.

另一方面, 若  $c'$  是图  $H' = (X'; A', E')$  的  $3-j$  型  $(k, d)$ -星染色, 令

$$c(v) = \begin{cases} c'(v), & \text{当 } v \neq x_r, x_i, \\ c(y), & \text{当 } v = x_r \text{ 或 } x_i, \end{cases}$$

则  $c$  是图  $H$  的  $3-j$  型  $(k, d)$ -星染色. 证毕.

对给定的正整数  $k, d (k \geq 2d)$ , 混合超图  $H$  的  $i-j$  型  $(k, d)$ -星染色方法数记为  $\pi_{i,j}(H; k, d)$ . 在不致混淆的情况下, 简单地记为  $\pi_{i,j}(H)$ .

**定理 10** 设  $\{x_i, x_j\} \in E \cup A$ , 有

$$H = (X; A, E),$$

$$H_1 = (X; A, E \cup \{x_i, x_j\}),$$

$$H_2 = (X; A \cup \{x_i, x_j\}, E),$$

则当  $r=1, 2; s=1, 2, 3$  时

$$\pi_{r,s}(H) = \pi_{r,s}(H_1) + \pi_{r,s}(H_2).$$

证 点集  $X$  到  $\langle k \rangle$  的映射  $c$  是混合超图  $H$  的  $r-s$  型  $(k, d)$ -星染色, 可分成不交的两类: (i)  $|c(x_i) - c(x_j)|_k \geq d$ ; (ii)  $|c(x_i) - c(x_j)|_k < d$ .

第一类中的每一个映射是图  $H_1$  的  $r-s$  型  $(k, d)$ -星染色; 第二类中的每一个映射是图  $H_2$  的  $r-s$  型  $(k, d)$ -星染色.

另一方面, 图  $H_1$  与  $H_2$  的星染色类是不交的, 且都是图  $H$  的星染色, 得证.

### 3 各种星染色的关系

**定理 11** 若混合超图  $H$  存在  $i-j$  型  $(k, d)$ -星染色,  $1 \leq i' \leq i, 1 \leq j' \leq j$  则图  $H$  也存在  $i'-j'$  型  $(k, d)$ -星染色.

证 设  $c$  是混合超图  $H=(X;A,E)$  的一个  $i-j$  型  $(k,d)$ -星染色, 则对每一集合  $S \in A$ ,  $c$  具备性质  $A_i$ . 因  $1 \leq i' \leq i$ , 故  $c$  具备性质  $A_{i'}$ . 同样的, 对每一集合  $S \in E$ ,  $c$  具备性质  $E_j$ , 故具备性质  $E_{j'}$  ( $1 \leq j' \leq j$ ), 从而,  $c$  是图的  $i'-j'$  型  $(k,d)$ -星染色. 证毕.

推论 1 若  $1 \leq i' \leq i \leq 3, 1 \leq j' \leq j \leq 3$ , 则

$$\chi_{i'j'}^*(H) \leq \chi_{ij}^*(H),$$

$$\pi_{i'j'}(H) \geq \pi_{ij}(H).$$

由上述定理与推论, 混合超图的九类型星染色具有一种偏序关系, 但一般的, 这不是良序的.

例 设  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $E_1$  由  $\{x_1, x_2\}$  组成,  $A_1$  由  $X$  本身组成, 则混合超图  $H_1 = (X; A_1, E_1)$  有 1-3 型  $(2,1)$ -星染色, 但没有任何的 2-1 型  $(k,d)$ -星染色.

若  $E_2$  由  $X$  本身组成,  $A_1$  由  $\{x_1, x_2\}$  组成, 则混合超图  $H_2 = (X; A_2, E_2)$  有 2-1 型  $(2,1)$ -星染色, 但没有任何的 1-3 型  $(k,d)$ -星染色.

这个例子表明: 一般的, 若  $i' \leq i, j' \geq j, (i, j) \neq (i', j'), i'-j'$  型星染色集与  $i-j$  型星染色集是不可比较的.

## 参 考 文 献

- 1 Vince A. Star Chromatic number. J. Graph Theory, 1988, 12: 551~559
- 2 Voloshin V I. The mixed hypergraphs. Comp. Sci. J. of Moldora, 1993, 1(1-1): 45~52
- 3 Berge C. Hypergraphs-combinatorics of finite sets. North Holland: Springer Verlag, 1989. 100~120

## Star Colouring of Mixed Hypergraphs

Wang Zhixiong

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

**Abstract** In reference to star colouring of mixed hypergraphs, the author studies its various forms, and discusses their properties, and compares their interrelation and their relation with colouring and star colouring of ordinary hypergraphs, and gives several classes of hypergraphs which are not colourable.

**Keywords** hypergraphs, class of subsets, set, colouring