第17卷 第2期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 17 No. 2
1996年4月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Apr. 1996

指数分布场合步进应力加速寿命试验的可靠性评定*

吴绍敏 彭 沛

(华侨大学管理信息科学系，泉州 362011)

摘要 在指数分布场合，依据步加寿命试验数据，先采用综合评定的方法，给出低应力水平的平均寿命估计；然后应用回归法对正常应力水平的平均寿命进行预测．

关键词 可靠性评定，步进应力，加速寿命试验，指数分布

分类号 O 213.2

对高可靠、长寿命产品的可靠性分析，多采用加大应力加速寿命试验的方法去获得寿命信息，然后根据测试数据建立回归方程，以预测正常应力下产品的可靠性指标．为保证正确估计正常应力水平下的可靠性指标，对应力水平的选择是有一定要求的．如低应力水平不能高于正常应力水平太多；高应力水平也不能太高，以避免失效机理的变化．由此可见，高应力水平的失效数据所提供的寿命信息不如低应力水平所提供的寿命信息准确．但过去在建立回归方程时却是同等的一员，这样建立的方程难免会影响低应力水平的失效数据所提供的寿命信息的作用．为减轻这一缺陷，本文先将低应力水平的寿命信息综合评定出来，然后建立起预测方程．模拟的例子证明其效果得到了明显的改善．

1 基本假定及引理

步加应力寿命试验的数据处理方法是基于下面3个基本假定[1,2]．

假定1 在正常应力水平 s_0 和加速应力水平 $s_1,s_2,\cdots,s_m$ $(s_0<s<\cdots<s_m)$ 下产品的寿命都服从指数分布，在应力 s_i 下产品寿命分布为 $E(\lambda_i)$，即

$$F_i(t)=1-e^{-\lambda_i t}\quad(i=0,m),\tag{1}$$

其中 $t\geqslant 0$，$\lambda_i>0$ 是失效率，$\theta_i=1/\lambda_i$ 是平均寿命．

假定2 产品的平均寿命 θ 与所加应力水平 s 之间有如下关系，即

$$\theta=e^{a+b\varphi(s)}\ \text{或}\ \ln\theta=a+b\varphi(s),\tag{2}$$

其中 a,b 是未知参数，$\varphi(s)$ 是应力水平 s 的已知函数．当应力水平 s 是温度时，$\varphi(s)=1/s$，此时模型(2)是阿伦尼斯模型；当应力 s 为电压时，模型(2)为逆幂律模型．

---

* 本文1995-08-27收到；国务院侨办自然科学基金资助项目

假定3　产品的剩余寿命仅依赖于当时已累积的失效部分和当时的应力条件，而与累积方式无关．即如果产品的寿命分布为$F(t)$，在应力s_i下工作t_i时间的累积失效概率$F_{s_i}(t_i)$相当于在应力s_j下工作t_i时间的累积失效概率，即$1-e^{-\lambda_i t_i}=1-e^{-\lambda_j t_j}$．由此可得

$$t_j=\frac{\lambda_i}{\lambda_j}t_i, \tag{3}$$

意指在应力s_i下试验t_i时间，相当于应力s_j下试验$\frac{\lambda_i}{\lambda_j}t_i$时间，利用式(3)可对步加试验的数据进行时间折算．

引理1　设某产品的寿命服从指数分布，从一批产品中随机抽取n个作步加试验，在s_i水平下试验到时刻T_i^*有r_i个失效，其失效时间为$t_{i1},t_{i2},\cdots,t_{ir_i}$，余下$(n-R_i)$个未失效．立即提高应力水平继续试验，其中$R_i=\sum\limits_{j=1}^{i}r_j$，记$T_i=\sum\limits_{j=1}^{i}t_{ij}+(n-R_i)T_i^*$为试验总时间．定时截尾试验$T_i^*$是截尾时间；定数截尾试验$T_i^*=t_{ir_i}(i=1,m)$．则

(1) 在水平s_i上的似然函数形式相同，为

$$L(r_i,T_i,\lambda_i)=\frac{(n-R_{i-1})!}{(n-R_i)!}\lambda_i^{r_i}e^{-\lambda_i T_i}\quad(i=1,m),R_0=0. \tag{4}$$

意指在s_1上投试n个样品，到时刻T_1^*时，r_1个失效，$(n-r_1)$个未失效试样在s_2上继续试验到T_2^*止．由于指数分布的无记忆性，s_2上的似然函数，就像$n-r_1$个未试验的样品投放在应力水平s_2上试验所得的似然函数是一样的，其余类推．

(2) 定数步加试验时，有$(r_i,T_i)(i=1,m)$是相互独立的．

证　当$m=3$时，证明其成立．记各水平的数据如下：

$$s_1,t_{11},t_{12},\cdots,t_1r_1,T_1^*;\quad s_2,t_{21},t_{22},\cdots,t_2r_2,T_2^*;\quad s_3,t_{31},t_{32},\cdots,t_3r_3,T_3^*.$$

由假定3知，将s_2,s_3上的数据折算成s_1上的数据；$t_{11},t_{12},\cdots,t_1r_1,T_1^*$保持不变．$t_{1r_1+1}=T_1^*+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t_{21},t_{1r_1+2}=T_1^*+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t_{22}\cdots,t_{1r_1+r_2}=T_1^*+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t_2r_2$是将$s_2$上的$r_2$个失效数据折算为$s_1$上的$r_2$个数据．$t_{1r_1+r_2+1}=T_1^*+\frac{\lambda_2}{\lambda_2}t_{31}=T_1^*+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(T_2^*+\frac{\lambda_2}{\lambda_3}t_{31})=T_2^*+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}T_2^*+\frac{\lambda_2}{\lambda_3}t_{31}$.

同理$t_{1r_1+r_2+2}=T_1^*+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}T_2^*+\frac{\lambda_3}{\lambda_1}t_{32},\cdots t_{1r_1+r_2+r_3}=T_1^*+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}T_2^*+\frac{\lambda_3}{\lambda_1}t_3r_3$是$s_3$上的$r_3$个失效数据折算为$s_1$上的$r_3$个失效数据，那么$t_{11},t_{12},\cdots,t_1r_1;t_{1r_1+1},t_{1r_1+2},\cdots,t_{1r_1+r_2};t_{1r_1+r_2+1},t_{1r_1+r_2+2},\cdots,t_{1r_1+r_2+r_3}$为$E(\lambda_1)$的前$(r_1+r_2+r_3)$个顺序统计量，$T=T_1^*+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}T_2^*+\frac{\lambda_3}{\lambda_1}T_3^*$为其试验终止时间．因此可得

$$p(t_{11}t_{12}\cdots t_1r_1;t_{1r_1+1}\cdots t_{1r_1+r_2};t_{1r_1+r_2+1}\cdots t_{1r_1+r_2+r_3})=\frac{n!}{(n-r_1-r_2-r_3)!}\lambda^{(r_1+r_2+r_3)}$$
$$\times\exp\{-\lambda_1[\sum_{j=1}^{r_1+r_2+r_3}t_{1j}+(n-r_1-r_2-r_3)T]\},$$

变换为原数据时，$|J|=(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^{r_2}(\frac{\lambda_3}{\lambda_1})^{r_3}$，从而得$p(t_{11}t_{12}\cdots t_1r_1;t_{21}\cdots t_{2r_2};t_{31}\cdots t_{3r_3};\lambda_1\lambda_2\lambda_3)=\frac{n!}{(n-r_1)!}\lambda_1^{r_1}e^{-\lambda_1T_1}\frac{(n-r_1)!}{(n-r_1-r_2)!}\lambda_2^{r_2}e^{-\lambda_2T_2}\frac{(n-r_1-r_2)!}{(n-r_1-r_2-r_3)!}\lambda_3^{r_3}e^{-\lambda_3T_3}$.

当定数截尾时，r_i是常数，T_i是r,v，故$(r_1,T_1),(r_2,T_2),(r_3,T_3)$相互独立，且有

$$p((r_i,T_i,\lambda_i)=\frac{(n-R_{i-1})!}{(n-R_i)!}\lambda_i^{r_i}\mathrm{e}^{-\lambda_i T_i}\quad(i=\overline{1,3});$$

当定时截尾时，r_i 与 T_i 都是 r,v. 且 T_i 中含有 r_i，故 r_i,T_i 之间都不是独立的，但似然函数形式一样．同理可推得 m 个应力水平的情况证毕．

2 Bayes 评定

由假定 I 知，$s_1<s_2<\cdots<s_m$ 决定了 $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_m$. 记 $r=(r_1,r_2,\cdots,r_m)$，$T=(T_1,T_2,\cdots,T_m)$，$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)$. 由引理 1 知

$$L(r,T,\lambda)\propto\prod_{i=1}^{m}\lambda_i^{r_i}\mathrm{e}^{-\lambda_i T_i}.$$

把 $\lambda_i(i=1,m)$ 视为 r,v，取其无信息验前分布 $\pi(\lambda_i)=1/\lambda_i(i=1,m)$，则

$$f(\lambda|,r,T)=\prod_{i=1}^{m}\lambda_i^{r_i-1}\mathrm{e}^{-\lambda_i T_i}\Big/\int_D\prod_{i=1}^{m}\lambda_i^{r_i-1}\mathrm{e}^{-\lambda_i T_i}\mathrm{d}\lambda_i,D=\{\lambda:\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_m\},\tag{5}$$

$$w_m^*\triangleq\int_D\prod_{i=1}^{m}\lambda_i^{r_i-1}\mathrm{e}^{-\lambda_i T_i}\mathrm{d}\lambda_i,r_i\geqslant1,\quad(i=1,m).$$

定理 1　λ_1 的后验密度为

$$f(\lambda_1|r,T)=w_m^{-1}\sum_{j_m=0}^{r_{(m)}-1}\sum_{j_{m-1}=0}^{r_{(m-1)}-1}\cdots\sum_{j_2=0}^{r_{(2)}-1}w(j_m,j_{m-1},\cdots,j_2)\frac{T_{(1)}^{r_{(1)}}}{\Gamma(T_{(1)})}\lambda_1^{r_{(1)}-1}\mathrm{e}^{-\lambda_1 T_{(1)}},$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&r_{(m)}=r_m,r_{(m-1)}=r_{m-1}+j_m,r_{(m-2)}=r_{m-2}+j_{m-1}\cdots r_{(2)}=r_2+j_3,r_{(1)}=r_1+j_2;\\&T_{(m)}=T_m,T_{(m-1)}=T_m+T_{m-1}\cdots T_{(2)}=T_{(3)}+T_2,T_{(1)}=T_{(2)}+T_1;\\&w(j_m,j_{m-1},\cdots,j_2)=\prod_{i=m}^{2}c_{j_i},c_{j_i}=\frac{T_{(i)}^{j_i}}{T_{(i-1)}^{r_{(i-1)}}}\frac{\Gamma(r_{(i-1)})}{j_i!}\quad(i=m,m-1,\cdots,2);\\&w_m=\sum_{j_m=0}^{r_{(m)}-1}\sum_{j_{m-1}=0}^{r_{(m-1)}-1}\cdots\sum_{j_2=0}^{r_{(2)}-1}w(j_m,j_{m-1},\cdots,j_2).\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

证　当 $m=4$ 时，证明其成立．由式(5)得

$$f(\lambda_1|rT)=w_4^{*\,-1}\{\lambda_1^{r_1-1}\mathrm{e}^{-\lambda_1T_1}\int_{\lambda_1}^{+\infty}\lambda_2^{r_2-1}\mathrm{e}^{-\lambda_2T_2}\mathrm{d}\lambda_2\int_{\lambda_2}^{+\infty}\lambda_3^{r_3-1}\mathrm{e}^{-\lambda_3T_3}\mathrm{d}\lambda_3\int_{\lambda_3}^{+\infty}\lambda_4^{r_4-1}\mathrm{e}^{-\lambda_4T_4}\mathrm{d}\lambda_4\},$$

$$I_4\triangleq\int_{\lambda_3}^{+\infty}\lambda_4^{r_4-1}\mathrm{e}^{-\lambda_4T_4}\mathrm{d}\lambda_4=T_4^{-r_4}\int_{\lambda_3T_4}^{+\infty}y^{r_4-1}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y.$$

应用下面恒等式

$$\int_x^{+\infty}u^{z-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\Gamma(z)\sum_{j=0}^{z-1}\frac{x^j}{j!}\mathrm{e}^{-x}\quad(z\text{ 为正整数}),\tag{7}$$

可得

$$I_4=\frac{\Gamma(r_4)}{T_4^{r_4}}\sum_{j_4=0}^{r_{(4)}-1}\frac{T_4^{j_4}}{j_4!}\lambda_3^{j_4}\mathrm{e}^{-\lambda_3T_4};$$

$$\begin{aligned}I_3&=\int_{\lambda_2}^{+\infty}\lambda_3^{r_3-1}\mathrm{e}^{-\lambda_3T_3}I_4\mathrm{d}\lambda_3=\frac{\Gamma(r_4)}{T_4^{r_4}}\sum_{j_4=0}^{r_{(4)}-1}\frac{T_4^{j_4}}{j_4!}\int_{\lambda_2}^{+\infty}\lambda_3^{r_3+j_4-1}\mathrm{e}^{-\lambda_3(T_4+T_3)}\mathrm{d}\lambda_3\\&=\frac{\Gamma(r_4)}{T_4^{r_4}}\sum_{j_4=0}^{r_{(4)}-1}\frac{T_4^{j_4}}{j_4!}\int_{\lambda_2}^{+\infty}\lambda_3^{r_{(3)}-1}\mathrm{e}^{-\lambda_3T_{(3)}}\mathrm{d}\lambda_3\end{aligned}$$

$$= \frac{\Gamma(r_4)}{T_4^{r_4}} \sum_{j_4=0}^{r_{(4)}-1} \frac{T_4^{j_4}}{j_4!} \frac{1}{T_{(3)}^{r_{(3)}}} \int_{\lambda_2 T_{(3)}}^{+\infty} y^{r_{(3)}-1} e^{-y} d\lambda$$

$$= \frac{\Gamma(r_4)}{T_4^{r_4}} \sum_{j_4=0}^{r_{(4)}-1} \frac{T_4^{j_4}}{j_4!} \frac{\Gamma(r_{(3)})}{T_{(3)}^{r_{(3)}}} \sum_{j_3=0}^{r_{(3)}-1} \frac{T_{(3)}^{j_3}}{j_3!} \lambda_2^{j_3} e^{-\lambda_2 T(3)}.$$

同理可得

$$I_2 = \int_{\lambda_1}^{+\infty} \lambda_2^{r_2-1} e^{-\lambda_2 T_2} I_3 d\lambda_2$$

$$= \frac{\Gamma(r_4)}{T_4^{r_4}} \sum_{j_4=0}^{r_{(4)}-1} \frac{T_4^{j_4}}{j_4!} \frac{\Gamma(r_{(3)})}{T_{(3)}^{r_{(3)}}} \sum_{j_3=0}^{r_{(3)}-1} \frac{T_{(3)}^{j_3}}{j_3!} \frac{\Gamma(r_{(2)})}{T_{(2)}^{r_{(2)}}} \sum_{j_2=0}^{r_{(2)}-1} \frac{T_{(2)}^{j_2}}{j_2!} \lambda_1^{j_2} e^{-\lambda_2 T_{(2)}},$$

$$I_1 = \frac{\Gamma(r_{(4)})}{T_4^{r_4}} \sum_{j_4=0}^{r_{(4)}-1} \sum_{j_3=0}^{r_{(3)}-1} \sum_{j_2=0}^{r_{(2)}-1} C_4 C_3 C_2 \frac{T_{(1)}^{r_{(1)}}}{\Gamma(r_{(1)})} \lambda_1^{r_{(1)}-1} e^{-\lambda_1 T(1)}$$

$$= \frac{\Gamma(r_{(4)})}{T_4^{r_4}} \sum_{j_4=0}^{r_{(4)}-1} \sum_{j_3=0}^{r_{(3)}-1} \sum_{j_2=0}^{r_{(2)}-1} w(j_4 j_3 j_2) \frac{T_{(1)}^{r_{(1)}}}{\Gamma(r_{(1)})} \lambda_1^{r_{(1)}-1} e^{-\lambda_1 T(1)}.$$

故得

$$\int_0^\infty f(\lambda_1 | r, T) = I_1 / w_4^*.$$

由 $\int_0^\infty f(\lambda_1 | r, T) d\lambda_1 = 1$ 可得 $w_4^* = \frac{\Gamma(r_{(4)})}{T_4^{r_{(4)}}} w_4$，故有

$$f(\lambda_1 | r, T) = w_4^{-1} \sum_{j_4=0}^{r_{(4)}-1} \sum_{j_3=0}^{r_{(3)}-1} \sum_{j_2=0}^{r_{(2)}-1} w(j_4 j_3 j_2) \frac{T_{(1)}^{r_{(1)}}}{\Gamma(r_{(1)})} \lambda_1^{r_{(1)}-1} e^{-\lambda_1 T(1)},$$

证毕.

推论 1　在二次损失下，λ_1 的 Bayes 估计为

$$\hat{\lambda}_1 = w_4^{-1} \sum_{j_m=0}^{r_{(m)}-1} \sum_{j_{m-1}=0}^{r_{(m-1)}-1} \cdots \sum_{j_2=0}^{r_{(2)}-1} w(j_m, j_{m-1}, \cdots, j_2) \frac{r_{(1)}}{T_{(1)}}), \tag{8}$$

因低应力水平的失效数据无法提供高应力水平的寿命信息，故得

推论 2　应用 $s_2 < s_3 < \cdots < s_m, \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_m$ 可推得

$$f(\lambda_2 | r, T) = w_{m-1}^{-1} \sum_{j_m=0}^{r_{(m)}-1} \sum_{j_{m-1}=0}^{r_{(m-1)}-1} \cdots \sum_{j_3=0}^{r_{(3)}-1} w(j_m, j_{m-1}, \cdots, j_3) \frac{T_{(2)}^{r_{(2)}}}{\Gamma(r_{(2)})} \lambda_2^{r_{(2)}-1} e^{-\lambda_2 T(2)}, \tag{9}$$

在二次损失下，λ_2 的 Bayes 估计为

$$\hat{\lambda}_2 = w_{m-1}^{-1} \sum_{j_m=0}^{r_{(m)}-1} \sum_{j_{m-1}=0}^{r_{(m-1)}-1} \cdots \sum_{j_3=0}^{r_{(3)}-1} w(j_m, j_{m-1}, \cdots, j_3) (\frac{r_{(2)}}{T_{(2)}}). \tag{10}$$

一般来说，

$$\hat{\lambda}_{i-1} = w_{m-i+2} \sum_{j_m=0}^{r_{(m)}-1} \sum_{j_{m-1}=0}^{r_{(m-1)}-1} \cdots \sum_{j_i=0}^{r_{(i)}-1} w(j_m, j_{m-1}, \cdots, j_i) (\frac{r_{(i-1)}}{T_{(i-1)}}) \ (2 \leqslant i \leqslant m),$$

$$w_{m-i+2} = \sum_{j_m=0}^{r_{(m)}-1} \sum_{j_{m-1}=0}^{r_{(m-1)}-1} \cdots \sum_{j_i=0}^{r_{(i)}-1} w(j_m, j_{m-1}, \cdots, j_i),$$

$\hat{\lambda}_m = r_m / T_m$. 则水平 s_i 上的平均寿命的估计值为

$$\hat{\theta}_i = 1/\hat{\lambda}_i \quad (i = \overline{1, m}).$$

令 $\eta_i = \ln\hat{\theta}_i (i = \overline{1, m})$，用数组 $(\varphi_i, \eta_i)(i = \overline{1, m})$，并按最小二乘法可建立预测方程为

$$\hat{\theta} = \exp\{\hat{a} + \hat{b}\varphi(s)\}, \tag{11}$$

式中 $\hat{a}=\bar{\eta}-\hat{b}\bar{\varphi}, \hat{b}=(\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\eta_i-\overline{m}\,\bar{\eta}\,\bar{\varphi})/(\sum_{i=1}^{m}\varphi_i^2-m\,\bar{\varphi}^2)$. 给定正常应力 s_0，可得 θ_0 的预测值为 $\hat{\theta}_0=e^{\hat{a}+\hat{b}\varphi(s_0)}$.

3 举例

取四个加速温度水平，即

$$s_1 = 160\ ℃ = 433\ \mathrm{K}; s_2 = 175\ ℃ = 448\ \mathrm{K};$$
$$s_3 = 200\ ℃ = 473\ \mathrm{K}; s_4 = 210\ ℃ = 483\ \mathrm{K}.$$

加速模型为阿伦尼斯方程，此时可算得 $\varphi_1=1/k_0s_1=26.801\ 308$；$\varphi_2=1/k_0s_2=25.903\ 944$；$\varphi_3=1/k_0s_3=24.534\ 813$；$\varphi_4=1/k_0s_4=24.026\ 844$. 其中 $k_0=0.861\ 7\times10^{-4}\ \mathrm{eV}\cdot\mathrm{K}^{-1}$是波兹曼常数．取 a=-18，$b=1$，即 $\theta_1=6\ 642.92$，$\theta_2=2\ 707.942$，$\theta_3=688.7$，$\theta_4=413.99$. 正常使用应力水平 $s_0=140$ ℃$=413$ K，$\theta_0=24\ 323.36$. 各应力下定时截尾时间分别为 $T_1^*=700$，$T_2^*=300$，$T_3^*=110$，$T_4^*=90$. 则样本容量为 50 在各应力下的一组模拟数据如下(单位:h)：

s_1:99,8,327.3,424.5,489.5　　$r_1 = 4$;

s_2:5.2,47.2,121.5,161.5,195.3,247.4　　$r_2 = 6$;

s_3:44.8,56.4,65.9,78.7,87.9,89.1,92.3,100.8　　$r_3 = 8$;

s_4:3.3,7.3,33.8,35.5,86.0　　$r_4 = 5$.

定数截尾时，截尾数 $r_1=r_2=r_3=r_4=10$，样本容量仍为 50. 则各应力下的一组模拟数据如下(单位:h)：

s_1:99.8,327.7,424.5,489.5,712.8,816.0,998.1,1 096.2,1 179.2,1 307.0;

s_2:228.8,274.5,312.0,362.2,398.3,402.9,415.8,449.0,507.3,533.8;

s_3:43.9,46.8,130.7,147.1,153.8,159.1,220.8,241.8,254.2,388.2;

s_4:19.0,19.6,21.8,28.0,44.5,68.3,72.0,92.0,147.1,162.8.

3.1 定时截尾的情形

$T_1=33\ 541.1$，$T_2=12\ 778.1$，$T_3=4\ 135.9$，$T_4=2\ 595.9$；$T_{(4)}=T_4$，$T_{(3)}=T_{(4)}+T_3=6\ 731.8$，$T_{(2)}=T_{(3)}+T_2=19\ 509.9$，$T_{(1)}=53\ 051$.

$$C_{j_4}=(6\ 731.8)^{-8}\left(\frac{2\ 595.9}{6\ 731.8}\right)^{j_4}\frac{(7+j_4)!}{j_4!},\quad C_{j_3}=(19\ 509.9)^{-7}\left(\frac{6\ 731.8}{19\ 509.9}\right)^{j_3}\frac{(5+j_3)!}{j_3!},$$

$$C_{j_2}=(53\ 051)^{-4}\left(\frac{19\ 509.9}{53\ 051}\right)^{j_2}\frac{(3+j_2)!}{j_2!}.$$

由式(8)，(10)，(11)得

$$\hat{\lambda}_1=\frac{\sum_{j_4=0}^{4}\sum_{j_3=0}^{7+j_4}\sum_{j_2=0}^{5+j_3}\left(\frac{2\ 596.9}{6\ 731.8}\right)^{j_4}\frac{(7+j_4)!}{j_4!}\left(\frac{6\ 731.8}{19\ 509.9}\right)^{j_3}}{\sum_{j_4=0}^{4}\sum_{j_3=0}^{7+j_4}\sum_{j_2=0}^{5+j_3}\left(\frac{2\ 596.9}{6\ 731.8}\right)^{j_4}\frac{(7+j_4)!}{j_4!}\left(\frac{6\ 731.8}{19\ 509.9}\right)^{j_3}}$$
$$\times\frac{\frac{(5+j_3)!}{j_3!}\left(\frac{19\ 509.9}{53\ 051}\right)^{j_2}\frac{(3+j_2)!}{j_2!}\left(\frac{4+j_2}{5\ 3\ 051}\right)}{\frac{(5+j_3)!}{j_3!}\left(\frac{19\ 509.9}{53\ 051}\right)^{j_2}\frac{(3+j_2)!}{j_2!}};$$

$$\hat{\lambda}_2=\frac{\sum\limits_{j_4=0}^{4}\sum\limits_{j_3=0}^{7+j_4}(\frac{2\,596.9}{6\,731.8})^{j_4}\frac{(7+j_4)!}{j_4!}(\frac{6\,731.8}{19\,509.9})^{j_3}\frac{(5+j_3)!}{j_3!}\frac{(6+j_3)}{19\,509.9}}{\sum\limits_{j_4=0}^{4}\sum\limits_{j_3=0}^{7+j_4}(\frac{2\,596.9}{6\,731.8})^{j_4}\frac{(7+j_4)!}{j_4!}(\frac{6\,731.8}{19\,509.9})^{j_3}\frac{(5+j_3)!}{j_3!}};$$

$$\hat{\lambda}_3=\sum_{j_4=0}^{4}(\frac{2\,596.9}{6\,731.8})^{j_4}\frac{(7+j_4)!}{j_4!}(\frac{8+j_4}{6\,731.8})/\sum_{j_4=0}^{4}(\frac{2\,596.9}{6\,731.8})^{j_4}\frac{(7+j_4)!}{j_4!};$$

$$\hat{\lambda}_4=\frac{5}{2595.9}.$$

应用计算机算得 $\hat{\lambda}_1=1.173\,866\,3\times10^{-4}$，$\hat{\lambda}_2=4.658\,454\,6\times10^{-4}$，$\hat{\lambda}_3=1.588\,589\times10^{-3}$，$\hat{\lambda}_4=1.926\,114\,2\times10^{-3}$. 故得 $\hat{\theta}_1=8\,518.86$，$\hat{\theta}_2=2\,146.64$，$\hat{\theta}_3=629.49$，$\hat{\theta}_4=519.18$. 令 $\eta_i=\ln\hat{\theta}_i$，由数组$(\varphi_i,\eta_i)(i=1,4)$可建立预测方程为

$$\hat{\theta}=\mathrm{e}^{-18.027\,066+1.002\,569\,5/k_s},\tag{12}$$

方程(12)的预测情况见表1.

表1　方程(12)的预测情况

原始值	$\theta_1=6\,642.93$	$\theta_2=2\,707.942$	$\theta_3=688.7$	$\theta_4=413.99$	$\theta_0=24\,323.36$
预测值	$\hat{\theta}_1=6\,926.5$	$\hat{\theta}_2=2\,817.03$	$\hat{\theta}_3=716.34$	$\hat{\theta}_4=429.03$	$\hat{\theta}_0=25\,446.4$
误　差	283.57	104.1	27.64	15.04	1 123.1

于是得正常应力下平均寿命的估计值为 $\hat{\theta}_0=25\,446.4$；失效率的估计值为 $\hat{\lambda}_0=3.929\,828\,9\times10^{-5}$.

3.2　定数截尾的情形

$r_{(4)}=r_4=10$；$r_{(3)}=r_3+j_4=10+j_4$；$r_{(2)}=r_2+j_3=10+j_3$，$r_{(1)}=r_1+j_2=10+j_2$；$T_{(4)}=T_4=2303.1$，$T_{(3)}=T_{(4)}+T_3=11\,853.6$，$T_{(2)}=T_{(3)}+T_2=31\,752.2$，$T_{(1)}=T_{(2)}+T_1=91\,483$；

$$C_{j_4}=(11\,853.6)^{-10}(\frac{2\,303.1}{11\,853.6})^{j_4}\frac{(9+j_4)!}{j_4!},\quad C_{j_3}=(31\,752.2)^{-10}(\frac{11\,853.6}{31\,752.2})^{j_3}\frac{(9+j_3)!}{j_3!},$$

$$C_{j_2}=(91\,483)^{-10}(\frac{31\,752.2}{91\,482})^{j_2}\frac{(9+j_2)!}{j_2!};$$

$$\hat{\lambda}_1=\frac{\sum\limits_{j_4=0}^{9}\sum\limits_{j_3=0}^{9+j_4}\sum\limits_{j_2=0}^{9+j_3}(\frac{2\,303.1}{11\,853.6})^{j_4}\frac{(9+j_4)!}{j_4!}(\frac{11\,853.6}{31\,752.2})^{j_3}\frac{(9+j_3)!}{j_3!}(\frac{31\,752.2}{91\,483})^{j_2}\frac{(10+j_2)}{91\,483}}{\sum\limits_{j_4=0}^{9}\sum\limits_{j_3=0}^{9+j_4}\sum\limits_{j_2=0}^{9+j_3}(\frac{2\,303.6}{11\,853.6})^{j_4}\frac{(9+j_4)!}{j_4!}(\frac{11\,853.6}{31\,52.2})^{j_3}\frac{(9+j_3)!}{j_3!}(\frac{31\,752.2}{91\,483})^{j_2}};$$

$$\hat{\lambda}_2=\frac{\sum\limits_{j_4=0}^{9}\sum\limits_{j_3=0}^{9+j_4}(\frac{2\,303.1}{11\,852.6})^{j_4}\frac{(9+j_4)!}{j_4!}(\frac{11\,853.6}{31\,752.2})^{j_3}\frac{(9+j_3)!}{j_3!}\frac{(10+j_3)}{31\,752.2!}}{\sum\limits_{j_4=0}^{9}\sum\limits_{j_3=0}^{9+j_4}(\frac{2\,303.1}{11\,852.6})^{j_4}\frac{(9+j_4)!}{j_4!}(\frac{11\,853.6}{31\,752.2})^{j_3}\frac{(9+j_3)!}{j_3!}};$$

$$\hat{\lambda}_3=\sum_{j_4=0}^{9}(\frac{2\,303.1}{11\,853.3})^{j_4}\frac{(9+j_4)!}{j_4!}\frac{(10+j_4)}{11853.6}/\sum_{j_4=0}^{9}(\frac{2\,303.1}{11\,853.6})^{j_4}\frac{(9+j_4)!}{j_4!};$$

$$\hat{\lambda}_4=\frac{10}{2\,303.1}.$$

应用计算机算得 $\hat{\lambda}_1=1.830\,460\,7\times10^{-4}$，$\hat{\lambda}_2=4.899\,774\times10^{-4}$，$\hat{\lambda}_3=1.046\,209\,6\times10^{-3}$，$\hat{\lambda}_4=4.342\,162\,3\times10^{-3}$. 故得 $\hat{\theta}_1=5\,463.11$，$\hat{\theta}_2=2\,040.83$，$\hat{\theta}_3=955.83$，$\hat{\theta}_4=230.3$ 令 $\eta_i=\ln\hat{\theta}_i$，由数组$(\varphi_i,\eta_i)(i=1,4)$可建立预测方程为

$$\hat{\theta} = e^{-18.421081+1.009\,344\,5\cdot/ks}, \tag{13}$$

于是得正常应力下平均寿命的估计值为 $\hat{\theta}_0=20\ 758.1$；失效率的估计值为 $\hat{\lambda}_0=4.817\ 396\ 5\times 10^{-5}$(表 2).

用一个模拟的例子便呈显的现象，基于大概率事件的观点，可以认为：

表 2　方程(13)的预测情况

原始值	$\theta_1=6\ 642.93$	$\theta_2=2\ 707.942$	$\theta_3=688.7$	$\theta_4=413.99$	$\theta_0=24\ 323.36$
预测值	$\hat{\theta}_1=5\ 600.84$	$\hat{\theta}_2=2\ 264.06$	$\hat{\theta}_3=568.5$	$\hat{\theta}_4=340.4$	$\hat{\theta}_0=20\ 758.1$
误　差	$-1\ 042.09$	-443.88	-120.2	-73.59	$-3\ 565.26$

(1) 从 $\hat{a}$,$\hat{a}$ 与 a,b 的拟合看，本文的方法比文〔1〕,〔2〕好；

(2) 从预测的情况看，定时截尾比定数截尾要好；

(3) 定时截尾有系统地偏高，定数截尾有系统地偏低；

(4) 如果两种数据都有，可取两个预测结果的平均值作为预测结果.

参　考　文　献

1　茆诗松. 指数分布场合下步进应力加速寿命试验的统计分析. 应用数学学报，1985,(3):311～316

2　仲崇新，张志华. 指数分布场合定时和定数截尾步进应力加速寿命试验的统计分析. 应用概率统计，1991,7(1):52～59

3　Zhang Yaoting, Yao Qiwei. Some maxinal information and generalized maximal entropy priors. Chinese Jouranl of Applied Probability and Statisitics, 1991, 7(2):192～221

Reliability Evaluation of Stepwise Stress Accelerated Life Testing under Exponential Distribution

Wu Shaomin　Pen Pei

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract Under the condition of exponential distribution and based on the data of stepwise accelerated life testing, the average life estimation of low stress level is given by adopting the method of comprehensive evaluation; and then the average life of normal stress level is predicted by applying regression method.

Keywords reliability evaluation, stepwise stress, accelerated life testing, exponential distribution