第17卷 第1期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 17 No. 1
1996年1月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jan. 1996

各向异性磁矢势 A 的微分方程及其解*

陈燊年 王建成

(华侨大学电子工程系，泉州 362011)

摘要 从各向异性介质中的磁场基本方程组出发，导出各向异性磁矢势 A 的微分方程，直接求解而得 A 的积分公式，并通过实例说明在各向异性坐标系中由 A 求 B 的方法.

关键词 磁矢势，各向异性，积分公式

分类号 TM 153

本文研究的问题是从研究网络现代场论[1]中提出来的. 网络现代场论中提出的场论说[2]其中一个要解决的问题，就是对4种基本网络元件从介质为线性各向同性到线性各向异性，再到非线性这3个层次要建立它们全部的12个特性普遍公式[3~4]. 当研究磁介质为线性各向异性的自感和互感的特性普遍公式时，必须先得知在各向异性的线性磁介质中的磁矢势 A 的积分公式. 因此，对此积分公式发生了兴趣，且于1991年顺利地解决了这个问题[5]. 它不仅由此导出各向异性磁介质的电感公式，而且由此在1991至1994年发表了7篇文章. 它们分别研究了在各向异性磁介质中若干种电流分布产生的稳恒磁场[6~9]和在各向异性电介质中若干种带电体分布产生的静电场[10~11]以及在各向异性磁介质中传播的电磁场的推迟势[12]. 可见，各向异性磁矢势 A 的积分公式具有相当的普遍性和重要性，是研究各向异性电磁场的理论基础之一. 在文[5]给出这个积分公式时，虽然 A 的微分方程已经导出，但该方程因包含 $\vec{\mu}^{-1}$ 当时无法求解它. 只得借助引入另一矢量 C，在 C 的微分方程中并不包含 $\vec{\mu}^{-1}$ 并且容易求解，然后通过 A 与 C 的关系而得 A 的积分公式. 这样对求 A 的积分公式绕了一大圈. 本文用简洁方法推导 A 的微分方程并找到直接求解 A 的微分方程的一种方法，得到 A 的积分公式就比较捷径.

1 磁各向异性介质中的磁矢势 A 的微分方程

当仅有磁场存在时，在导体周围的各向异性均匀磁介质中，磁场基本方程组为

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}, \tag{2}$$

$$B_k = \sum_{i=1}^{3} \mu_{ki} H_i, \quad (k = 1,2,3), \tag{3}$$

* 本文1995-03-20收到；福建省自然科学基金资助项目

由磁导率张量 μ_{ki} 定义一个并矢，即

$$\vec{\mu} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\mu_{ki}e_k e_i. \tag{4}$$

式(3)可表成

$$B = \vec{\mu}\cdot H, \tag{5}$$

若〔μ_{ki}〕是非奇矩阵，即存在它的逆矩阵〔μ_{ki}〕$^{-1}$，则上式有唯一解，即

$$H = \vec{\mu}^{-1}\cdot B, \tag{6}$$

式中

$$\vec{\mu}^{-1} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\mu_{ki}^{(-1)}e_k e_i. \tag{7}$$

μ_{ki}^{-1} 是逆矩阵〔μ_{ki}〕$^{-1}$ 中的元素．式(6)代入式(7)得

$$\nabla\times(\vec{\mu}^{-1}\cdot B) = j,$$

再以式(2)代入上式，便得 A 所满足的微分方程为

$$\nabla\times(\vec{\mu}^{-1}\cdot\Delta\times A) = j. \tag{8}$$

2　各向异性磁矢势 A 的积分公式

为简单起见，令在张量 μ_{kl} 3 个主轴为 x_1，x_2，x_3 轴的情形下，寻找满足方程(8)的 A 的解．当介质为线性各向同性时，已知 A 的积分公式为

$$A_i(x) = \frac{\mu}{4\pi}\int\frac{j_i(x')\mathrm{d}V'}{(R_1^2+R_2^2+R_3^2)^{1/2}},\quad (i=1,2,3),$$

式中 $R = x - x'$．由此推知，当介质为线性各向异性时，A 的积分公式亦应有类似的形式，即

$$A_i(x) = \frac{a_i}{4\pi}\int\frac{j_i(x')\mathrm{d}V'}{(b_1R_1^2+b_2R_2^2+b_3R_3^2)^{1/2}},\quad (i=1,2,3), \tag{9}$$

式中 a_i 和 $b_i(i=1,2,3)$ 为待定常数．如令

$$y_i = \sqrt{b_i}R_i,\ (i=1,2,3), \tag{10}$$

则有

$$\mathrm{d}y_i = \sqrt{b_i}\,\mathrm{d}R_i,\ (i=1,2,3), \tag{11}$$

则式(9)中的第一分量表达为

$$A_1(x) = \frac{a_1}{4\pi}\int\frac{j_1(x')\mathrm{d}V'}{(y_1^2+y_2^2+y_3^2)^{1/2}}. \tag{12}$$

若 F 代表方程(8)中括号内的矢量 $F = \vec{\mu}^{-1}\cdot\nabla\times A$，则它的三个分量为

$$F_1 = \mu_{11}^{(-1)}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)+\mu_{12}^{(-1)}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right)+\mu_{13}^{(-1)}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right);$$

$$F_2 = \mu_{21}^{(-1)}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)+\mu_{22}^{(-1)}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right)+\mu_{23}^{(-1)}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right);$$

$$F_3 = \mu_{31}^{(-1)}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)+\mu_{32}^{(-1)}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right)+\mu_{33}^{(-1)}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right).$$

当张量μ_{kl}的3个主轴为x_1, x_2, x_3轴时，有$\mu_{kl}=0(k\neq l)$和$\mu_{kl}^{-1}=\frac{1}{\mu_{kl}}(k=l)$. 因此，方程(8)中的第一分量的方程为

$$j_1=\frac{\partial F_3}{\partial x_2}-\frac{\partial F_2}{\partial x_3}=\frac{1}{\mu_{33}}\frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial A_2}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_2})-\frac{1}{\mu_{22}}\frac{\partial}{\partial x_3}(\frac{\partial A_1}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_1}),$$

把圆括号外的变量(x_1, x_2, x_3)变换成(y_1, y_2, y_3)，并合并同类项，得

$$j_1=\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial R_1}\frac{\partial R_1}{\partial x_1}(\frac{1}{\mu_{33}}\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{1}{\mu_{22}}\frac{\partial A_3}{\partial x_3})-\frac{\partial}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial R_2}\frac{\partial R_2}{\partial x_2}(\frac{1}{\mu_{33}}\frac{\partial A_1}{\partial x_2})$$
$$-\frac{\partial}{\partial y_3}\frac{\partial y_3}{\partial R_3}\frac{\partial R_3}{\partial x_3}(\frac{1}{\mu_{22}}\frac{\partial A_1}{\partial x_3}), \tag{13}$$

由式(9)可见，上式中A_2和A_3与j_1无关，但上式表明右边三项都必须出现j_1才有可能保持两边恒等的关系，并考虑每一项对微商变量应有对称性，故可令上式右边第一项圆括号内的项为

$$\frac{1}{\mu_{33}}\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{1}{\mu_{22}}\frac{\partial A_3}{\partial x_3}=-M_1\frac{\partial A_1}{\partial x_1}, \tag{14}$$

式中M_1是一个待定常数. 把上式代入式(13)，得

$$j_1=-\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial R_1}\frac{\partial R_1}{\partial x_1}(M_1\frac{\partial A_1}{\partial x_1})-\frac{\partial}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial R_2}\frac{\partial R_2}{\partial x_2}(\frac{1}{\mu_{33}}\frac{\partial A_1}{\partial x_2})-\frac{\partial}{\partial y_3}\frac{\partial y_3}{\partial R_3}\frac{\partial R_3}{\partial x_3}(\frac{1}{\mu_{22}}\frac{\partial A_1}{\partial x_3}).$$

根据关系$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$，对观察点$(x_1,x_2,x_3)$求微商时，源点的坐标$(x_1', x_2', x_3')$是不变的，因而有

$$\partial R_1/\partial x_1=\partial R_2/\partial x_2=\partial R_3/\partial x_3=1.$$

由式(11)又有

$$\mathrm{d}y_i=\sqrt{b_i}\,\mathrm{d}R_i=\sqrt{b_i}\,\mathrm{d}x_i, \quad (i=1,2,3),$$

或

$$\frac{\partial}{\partial x_i}=\sqrt{b_i}\frac{\partial}{\partial y_i}, \quad (i=1,2,3).$$

于是，前式写成

$$j_1=-M_1b_1[\frac{\partial}{\partial y_1}(\frac{\partial A_1}{\partial y_1})+\frac{\partial}{\partial y_2}(\frac{\partial A_1}{\partial y_2})+\frac{\partial}{\partial y_3}(\frac{\partial A_1}{\partial y_3})], \tag{15}$$

式中

$$M_1b_1=b_2/\mu_{33}=b_3/\mu_{22}. \tag{16}$$

同理，由方程(8)的第二分量和第三分量的方程可得

$$j_2=-M_2b_2[\frac{\partial}{\partial y_1}(\frac{\partial A_2}{\partial y_1})+\frac{\partial}{\partial y_2}(\frac{\partial A_2}{\partial y_2})+\frac{\partial}{\partial y_3}(\frac{\partial A_2}{\partial y_3})], \tag{17}$$

$$j_3=-M_3b_3[\frac{\partial}{\partial y_1}(\frac{\partial A_3}{\partial y_1})+\frac{\partial}{\partial y_2}(\frac{\partial A_3}{\partial y_2})+\frac{\partial}{\partial y_3}(\frac{\partial A_3}{\partial y_3})], \tag{18}$$

式中

$$M_2b_2=b_3/\mu_{11}=b_1/\mu_{33}, \tag{19}$$
$$M_3b_3=b_1/\mu_{22}=b_2/\mu_{11}. \tag{20}$$

由式(16)，(19)和(20)解得

$$M_1=\mu_{11}/\mu_{22}\mu_{33}, M_2=\mu_{22}/\mu_{11}\mu_{33}, M_3=\mu_{33}/\mu_{11}\mu_{22} \tag{21}$$

和

$$b_1 = 1/\mu_{11},\ b_2 = 1/\mu_{22},\ b_3 = 1/\mu_{33}. \tag{22}$$

把式(21)和(22)代入式(15)，(17)和(18)中，分别得

$$j_1 = -\frac{1}{\mu_{22}\mu_{33}}\left[\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial A_1}{\partial y_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\partial A_1}{\partial y_2}\right) + \frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{\partial A_1}{\partial y_3}\right)\right], \tag{23}$$

$$j_2 = -\frac{1}{\mu_{33}\mu_{11}}\left[\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial A_2}{\partial y_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\partial A_2}{\partial y_2}\right) + \frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{\partial A_2}{\partial y_3}\right)\right], \tag{24}$$

$$j_3 = -\frac{1}{\mu_{11}\mu_{22}}\left[\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y_2}\right) + \frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y_3}\right)\right]. \tag{25}$$

现在就可以对式(12)求如下偏导

$$\frac{\partial A_1}{\partial y_1} = -\frac{a_1}{4\pi}\int\frac{y_1 j_1(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}V'}{(y_1^2+y_2^2+y_3^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial y_2} = -\frac{a_1}{4\pi}\int\frac{y_2 j_1(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}V'}{(y_1^2+y_2^2+y_3^2)^{3/2}},\quad \frac{\partial A_1}{\partial y_3} = -\frac{a_1}{4\pi}\int\frac{y_3 j_1(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}V'}{(y_1^2+y_2^2+y_3^2)^{3/2}}.$$

代入式(23)中，得

$$j_1 = \frac{a_1}{4\pi\mu_{22}\mu_{33}}\left[\frac{\partial}{\partial y_1}\int\frac{y_1 j_1(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}V'}{(y_1^2+y_2^2+y_3^2)^{3/2}} + \frac{\partial}{\partial y_2}\int\frac{y_2 j_1(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}V'}{(y_1^2+y_2^2+y_3^2)^{3/2}}\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial y_3}\int\frac{y_3 j_1(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}V'}{(y_1^2+y_2^2+y_3^2)^{3/2}}\right], \tag{26}$$

上式对电流分布区域求积分时，观察点的坐标 $\boldsymbol{x}$ 是固定的，因而由关系 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{R}$ 可知

$$\mathrm{d}V' = |\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\mathrm{d}x_3'| = |\mathrm{d}R_1\mathrm{d}R_2\mathrm{d}R_3|$$
$$= \frac{1}{\sqrt{b_1b_2b_3}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3 = \sqrt{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33}}\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3.$$

于是，式(26)写成

$$j_1 = \frac{a_1}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_{11}}{\mu_{22}\mu_{33}}}\int\left[\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{y_1}{y^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{y_2}{y^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{y_3}{y^3}\right)\right]j_1(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3$$
$$= \frac{a_1}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_{11}}{\mu_{22}\mu_{33}}}\int\left(\nabla_y\cdot\frac{\boldsymbol{y}}{y^3}\right)j_1(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3, \tag{27}$$

式中算符 ∇_y 为

$$\nabla_y = \boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial y_1} + \boldsymbol{e}_2\frac{\partial}{\partial y_2} + \boldsymbol{e}_3\frac{\partial}{\partial y_3}. \tag{28}$$

当 $y\neq 0$ 时，$\nabla_y\cdot\dfrac{\boldsymbol{y}}{y_3}=0$，式(27)两边恒等；当 $y=0$ 时，可取 $j_1(\boldsymbol{x}')=j_1(\boldsymbol{x})$，并有

$$\int\left(\nabla_y\cdot\frac{\boldsymbol{y}}{y^3}\right)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3 = \oiint\frac{\boldsymbol{y}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_y}{y^3} = 4\pi.$$

所以，由式(27)两边恒等，得出

$$a_1 = \sqrt{\mu_{22}\mu_{33}/\mu_{11}}, \tag{29}$$

把式(22)，(29)代入式(9)的第一分量中，得

$$A_1(x) = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_{22}\mu_{33}}{\mu_{11}}}\int \frac{j_1(x')\mathrm{d}V'}{(R_1^2/\mu_{11} + R_2^2/\mu_{22} + R_3^2/\mu_{33})^{1/2}}. \tag{30}$$

用同样方式处理式(24)和(25),可证得

$$a_2 = \sqrt{\mu_{11}\mu_{33}/\mu_{22}}, \qquad a_3 = \sqrt{\mu_{11}\mu_{22}/\mu_{33}}. \tag{31}$$

把式(22),(31)代入式(9)的第一分量和第二分量中,得

$$A_2(x) = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_{11}\mu_{33}}{\mu_{22}}}\int \frac{j_2(x')\mathrm{d}V'}{(R_1^2/\mu_{11} + R_2^2/\mu_{22} + R_3^2/\mu_{33})^{1/2}}; \tag{32}$$

$$A_3(x) = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_{11}\mu_{22}}{\mu_{33}}}\int \frac{j_3(x')\mathrm{d}V'}{(R_1^2/\mu_{11} + R_2^2/\mu_{22} + R_3^2/\mu_{33})^{1/2}}. \tag{33}$$

于是,由式(30),(32),(33)得各向异性磁矢势 $\boldsymbol{A}$ 的积分公式为

$$A_i(x) = \frac{\Delta_{ii}}{4\pi\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33}}}\int \frac{j_i(x')\mathrm{d}V'}{(R_1^2/\mu_{11} + R_2^2/\mu_{22} + R_3^2/\mu_{33})^{1/2}}, \quad (i = 1,2,3), \tag{34}$$

式中 Δ_{ij}代表行列式

$$|\mu_{ij}| = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{vmatrix}$$

中元素为 μ_{ij}的代数余子式.当在一般情况下,介质的张量 μ_{kl}3 个主轴不为 x_1, x_2, x_3 轴时,亦可证明方程(8)的解为

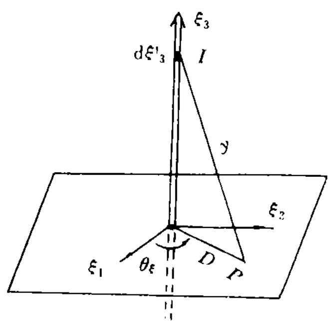
$$A_i(x) = \frac{1}{4\pi\sqrt{|\mu_{ij}|}}\sum_{j=1}^{3}\Delta_{ij}\int \frac{j_i(x')\mathrm{d}V'}{\sum_{n=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\mu_{nm}^{(-1)}(R_nR_m)^{1/2}}, \quad (i = 1,2,3), \tag{35}$$

3　举例

在各向异性均匀磁介质中,设有一无穷长直导线载电流 I,求磁场的磁矢势和磁感应强度.

取介质 3 个主轴与选用的直角坐标 3 个轴一致,并使与导线重合的介质主轴为 x_3 轴.这时式(34)中只有一个不为零的分量 $A_3(x)$为

$$A_3(x) = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_{11}\mu_{22}}{\mu_{33}}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I\mathrm{d}x'_3}{(R_1^2/\mu_{11} + R_2^2/\mu_{22} + R_3^2/\mu_{33})^{1/2}}. \tag{36}$$



附图　载电流为 I 的无限长直导线

引入各向异性直角坐标系 ζ_1, ζ_2, ζ_3,则

$$\zeta_i = x_i/\sqrt{\mu_{ii}}, \quad (i = 1,2,3),$$

在此坐标系中,电流元 $I\mathrm{d}\zeta'_3$ 到 P 点的距离 y 为(见图 1)

$$y = [(\zeta_1 - \zeta'_1)^2 + (\zeta_2 - \zeta'_2) + (\zeta_3 - \zeta_3)^2]^{1/2}$$
$$= (R_1^2/\mu_{11} + R_2^2/\mu_{22} + R_3^2/\mu_{33})^{1/2},$$

因而，式(36)可写成

$$A_3 = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_{22}\mu_{11}}{\mu_{33}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{I\sqrt{\mu_{33}}\mathrm{d}\zeta_3}{y}$$

$$= \frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}}{4\pi}I\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\zeta_3}{(D^2+\zeta_3^2)^{1/2}},$$

式中 D 为 P 点到导线的垂直距离．利用上式可计算两点 P 和 P_0 的磁矢势差．设 P_0 点到导线的垂直距离 D_0，则

$$A_3(P) - A_3(P_0) = \lim_{M\to\infty}\frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}}{4\pi}I\ln\frac{y_3' + \sqrt{y_3'^2 + D^3}}{y_3' + \sqrt{y_3'^2 + D_0^3}}\Bigg|_{-M}^{+M}$$

$$= \frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}}{4\pi}I\lim_{M\to\infty}\ln\left[\frac{1+\sqrt{1+D^2/M^2}}{1+\sqrt{1+D_0^2/M^2}}\cdot\frac{-1+\sqrt{1+D_0^2/M^2}}{-1+\sqrt{1+D^2/M^2}}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}}{4\pi}I\ln\frac{D_0^2}{D^2} = -\frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}}{2\pi}I\ln\frac{D}{D_0}.$$

若选 P_0 点为参考点，规定 $A_3(P_0)=0$，则

$$\boldsymbol{A}(P) = -\frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}}{2\pi}I\ln\frac{D}{D_0}\boldsymbol{e}_3, \tag{37}$$

式中

$$D = (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^{1/2} = (x_1^2/\mu_{11} + x_2^2/\mu_{22})^{1/2}, \tag{38}$$

$$D_0 = (\zeta_{10}^2 + \zeta_{20}^2)^{1/2} = (x_{10}^2/\mu_{11} + x_{20}^2/\mu_{22})^{1/2}. \tag{39}$$

(x_1, x_2)和(x_{10}, x_{20})分别是 P 点和 P_0 点位于垂直导线的平面内的坐标．把以上二式代入式(37)中，即是所求的各向异性磁矢势．

为求磁感应强度，先对式(37)取对∇_ζ的旋度，即

$$\nabla_\zeta \times \boldsymbol{A} = -\frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}}{2\pi}I\left(\nabla_\zeta \ln\frac{D}{D_0}\right)\times\boldsymbol{e} = \frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}}{2\pi}\frac{I}{D}\boldsymbol{e}_{\theta\zeta}, \tag{40}$$

式中 $\boldsymbol{e}_{\theta\zeta}$是在各向异性坐标系中的方位角 θ_ζ 的单位矢量，而算符∇_ζ为

$$\nabla_\zeta = \boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial\zeta_1} + \boldsymbol{e}_2\frac{\partial}{\partial\zeta_2} + \boldsymbol{e}_3\frac{\partial}{\partial\zeta_3};$$

其次，若引入一个与磁矢势 $\boldsymbol{A}$ 有关的矢量 $\boldsymbol{A}'$ 为

$$\boldsymbol{A}' = \sqrt{\mu_{11}}A_1\boldsymbol{e}_1 + \sqrt{\mu_{22}}A_2\boldsymbol{e}_2 + \sqrt{\mu_{33}}A_3\boldsymbol{e}_3 = \vec{\mu}'\cdot\boldsymbol{A}, \tag{41}$$

式中并矢 $\vec{\mu}'$ 为

$$\vec{\mu}' = \sqrt{\mu_{11}}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + \sqrt{\mu_{22}}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + \sqrt{\mu_{33}}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3.$$

并利用式(37)的坐标变换关系，就可以把表示 $\boldsymbol{B}$ 的算符∇变换成算符∇_ζ，即

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B} &= \nabla \times \boldsymbol{A} \\
&= \frac{\boldsymbol{e}_1}{\sqrt{\mu_{22}\mu_{33}}}\left(\frac{\partial A'_3}{\partial \zeta_2} - \frac{\partial A'_2}{\partial \zeta_3}\right) + \frac{\boldsymbol{e}_2}{\sqrt{\mu_{33}\mu_{11}}}\left(\frac{\partial A'_1}{\partial \zeta_3} - \frac{\partial A'_3}{\partial \zeta_1}\right) + \frac{\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}}\left(\frac{\partial A'_2}{\partial \zeta_1} - \frac{\partial A'_1}{\partial \zeta_2}\right) \\
&= \vec{\mu}\cdot \nabla_\zeta \times \boldsymbol{A}',
\end{aligned} \tag{42}
$$

式中又引入并矢 $\vec{\mu}''$为

$$
\vec{\mu}'' = \frac{1}{\sqrt{\mu_{22}\mu_{33}}}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{\mu_{33}\mu_{11}}}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3,
$$

把式(37)代入式(41),再代入式(42)得

$$
\boldsymbol{B} = \sqrt{\mu_{33}}\vec{\mu}\cdot \nabla_\zeta \times A.
$$

于是,就可以把在各向异性坐标系中计算的结果式(40)代入上式得

$$
\boldsymbol{B} = \sqrt{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33}}\,\frac{I}{2\pi D}\vec{\mu}\cdot \boldsymbol{e}_{\theta\zeta}, \tag{43}
$$

式中在各向异性坐标系中的单位矢量为

$$
\boldsymbol{e}_{\theta\zeta} = \cos\theta_\zeta \boldsymbol{e}_2 - \sin\theta_\zeta \boldsymbol{e}_1.
$$

故

$$
\boldsymbol{B} = \frac{I}{2\pi D}\left(\sqrt{\mu_{22}}\cos\theta_\zeta \boldsymbol{e}_2 - \sqrt{\mu_{11}}\sin\theta_\zeta \boldsymbol{e}_1\right), \tag{44}
$$

式中把方位角 θ_ζ 变换回原来坐标系(x_1, x_2, x_3)中

$$
\cos\theta_\zeta = \frac{y_1}{D} = \frac{x_1}{\sqrt{\mu_{11}}(x_1^2/\mu_{11} + x_2^2/\mu_{22})^{1/2}};\ \sin\theta_\zeta = \frac{y_2}{D} = \frac{x_2}{\sqrt{\mu_{22}}(x_1^2/\mu_{11} + x_2^2/\mu_{22})^{1/2}}.
$$

连同式(38)一起代入式(44)中,即得在直角坐标系(x_1, x_2, x_3)中所求的 $\boldsymbol{B}$ 依赖于磁各向异性的关系为

$$
\boldsymbol{B} = \frac{I}{2\pi(x_1^2/\mu_{11} + x_2^2/\mu_{22})}\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}\left(\frac{x_1}{\mu_{11}}\boldsymbol{e}_2 - \frac{x_2}{\mu_{22}}\boldsymbol{e}_1\right), \tag{45}
$$

当 $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu$ 时,即当磁介质为线性各向同性时,式(45)简化成

$$
\boldsymbol{B} = \frac{\mu I}{2\pi D}\boldsymbol{e}_\theta,
$$

这正是所预期的结果.

参 考 文 献

1 陈棨年,何煜光,陈 洁.网络现代场论.北京:电子工业出版社,1991.1～323

2 陈棨年,何煜光.非线性网络与线性网络统一的场论说,中国科学(A辑),1994,24(12):1316～1326

3 陈棨年.一组从线性到非线性的电容特性普遍公式.科学通报,1991,36(1):24～27

4 陈棨年,王建成.从线性到非线性的四种基本电子元件特性普遍公式.科学通报,1993,38(16):1527～1531

5 陈棨年,陈 洁.各向异性磁介质的电感新公式.电子科学学刊,1991,13(2):159～168

6 王建成，陈燊年．磁各向异性的毕奥一萨伐尔定律及其应用．华侨大学学报(自然科学版)，1989，10(2)：125～132

7 王建成，陈燊年．在各向异性介质中磁向量势的多极矩展开．华侨大学学报(自然科学版)，1990，11(1)：16～24

8 林文枝，陈燊年．椭圆环电流在各向异性介质中的磁场．华侨大学学报(自然科学版)，1993，14(3)：308～315

9 林文枝，陈燊年．在各向异性磁介质中载流二次曲线焦点的磁场．华侨大学学报(自然科学版)，1992，13(4)：454～461

10 郭震宁，陈燊年．在各向异性介质中电势的多极矩展开．华侨大学学报(自然科学版)，1993，14(4)：440～446

11 郭震宁，陈燊年，林文枝．带电椭球在各向异性介质中静电势．华侨大学学报(自然科学版)，1994，15(2)：163～167

12 陈燊年，王建成，陈强顺．各向异性磁媒质中达朗伯方程及其推迟势．见：蔡圣善主编．全国第四届电动力学研讨会论文选集．北京：高等教育出版社，1993．144～149

Differential Equation of the Magnetic Vector Potential in Anisotropic Medium and Its Solution

Chen Shennian　Wang Jiancheng

(Dept. of Electron. Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract An integral formula of magnetic vector potential A in anisotropic medium is obtained by directly solving differential equation of A, which is derived from basic equation of magnetic field in anisotropic medium. The method for solving B from A in anisotropic coordinates is exemplified.

Keywords magnetic vector potential, anisotropic medium, integral formula