

# 测量控制网的可靠性问题\*

王 仁 谦

(华侨大学土木工程系, 泉州 362011)

**摘要** 论述测量控制网的可发现性与可区分性及其在优化设计中的重要性, 并提出一种判断可发现性与可区分性的方法.

**关键词** 可靠性, 控制网, 测量

**分类号** TB 114.3

在测量控制网优化设计中, 人们已经可利用计算机进行模拟计算, 并研究出不同平差模型的理论精度. 在满足精度要求的条件下进行优化设计, 但这种优化设计的前提条件是假设观测值中含有偶然误差. 随着测量仪器精度的提高, 人们用较少的多余观测就可满足测量精度指标. 然而自有测量以来, 系统误差与粗差总是伴随着偶然误差存在. 对于系统误差与粗差, 传统的处理方法都是在平差之前单独处理. 特别是对观测值中的粗差, 传统的方法是采用人工挑选, 即通过经验分析来挑选之. 随着现代化测量仪器、测量方法和数据记录方法的改进, 自动化程度随之提高, 传统的人工挑选方法显得越来越不相适应. 近代测量平差对粗差的处理有两种方法: 一是采用粗差探测的方法, 剔除含有粗差的观测值, 然后按最小二乘法进行平差; 另一种方法则是把粗差归入随机模型, 采用抗差能力较强的平差方法进行平差, 即所谓的抗差估计.

## 1 可靠性在抗差估计中的重要性

可靠性是指控制网探测出观测值存在的粗差, 以及抵抗观测值中残存粗差对平差结果影响的能力. 控制网的可靠性完全由它的图形结构决定, 主要是由它的多余观测数及图形结构的均匀性决定. 例如, 采用两个方向的前方交会法确定未知点的坐标, 当交会角为  $90^\circ$  时交会精度最高, 但这种交会法的可靠性很差. 如果有 1 个方向含有粗差, 这个粗差是不可发现的, 它将完全作用于最后的结果. 若采用 3 个方向交会, 则当观测值中存在 1 个粗差时, 可以通过交会误差三角形发现粗差, 但却不可确定粗差存在于哪一个观测值中. 即这种情况是对粗差不可定位的, 它只具有可发现性. 若采用 4 个方向进行交会, 则对粗差不仅可以发现, 还可进行定位, 即具有可发现性与可区分性. 象这种简单的图形结构, 我们可以容易地看出何种结构具有可发现性; 何种结构具有可区分性. 但对于复杂的图形结构, 则必须采取量化的方法进行

\* 本文 1995-09-02 收到; 福建省自然科学基金资助项目

分析判断.

对于一个不具备发现粗差能力的控制网,不论采用哪种方法平差,都无法发现粗差.对于只具备可发现性而不具备可区分性的控制网,企图采用某种方法进行平差和对粗差进行自动定位,其所得结果将是不稳定的,因而也是不可靠的.因此,可发现性与可区分性是数据探测与抗差估计的前提.

## 2 观测值误差与改正数的关系

在间接平差中,改正数向量可以表示为

$$\begin{aligned} V &= Ax - l = AQA^TPl - l \\ &= (AQA^TP - E)l, \\ Q_w &= (AQA^TP - E)Q_{ll}(AQA^TP - E)^T \\ &= P^{-1} - AQA^T, \end{aligned}$$

故得下式

$$V = -Q_w \cdot Pl. \quad (1)$$

式(1)说明改正数向量  $V$  取决于观测向量和矩阵  $Q_wP$ , 该矩阵由图形结构(矩阵  $A$ )和  $P$  来确定. 式(1)中绝对项  $l = I - a_0$ , 如果用未知数的真值代入, 则  $l$  代表观测值的真误差  $\epsilon_l$ , 于是由式(1)可得  $V = -Q_w \cdot P\epsilon_l$ .

令  $R = Q_wP$ , 则

$$V = -R\epsilon_l, \quad (2)$$

由式(2)可得:

(1)  $V_i = -\sum_{j=1}^n r_{ij}\epsilon_j$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 即任一改正数  $V$  都受所有观测误差的影响;

(2)  $V'_i = -r_{ij}\epsilon_j$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 某一观测值的误差  $\epsilon_j$  对所有改正数都有影响;

(3)  $V_i^* = -r_{ii}\epsilon_i$  某一观测值误差对本改正数的影响只是其中的一部分.

矩阵  $R$  为幂等矩阵, 其秩等于迹, 且  $tr(R) = r < n$ ; 即它的秩等于控制网的多余观测数.

所以,  $R$  为降秩矩阵, 不可能由  $V$  直接求真误差  $\epsilon_l$ .

$R$  的主对角线元素  $r_{ii}$  为第  $i$  个观测值的多余观测分量, 且  $\sum_{i=1}^n r_{ii} = r$  ( $0 \leq r_{ii} \leq 1$ ).

(1) 若  $r_{ii} = 0$ , 则表示  $L_i$  为必要观测,  $v_i = 0$ , 其观测误差全部作用于未知数;

(2) 若  $r_{ii} = 1$ , 则表示  $L_i$  为完全多余观测, 其观测误差全部反映在其改正数上, 对其它观测值的改正数无影响;

(3) 当  $0 < r_{ii} < 1$  时,  $L_i$  的误差在本改正数上的反映只是其中的一部分, 有一部分反映在其它相关的改正数上, 有时甚至在其它改正数上的反映大于在本观测值的改正数. 因此, 根据  $V_i$  的大小来判断  $L_i$  是否存在数差是不可靠的.

## 3 模型误差的可发现性与可区分性

由  $R$  的计算公式中可知,  $r_i$  的大小取决于  $P$  和  $A$ , 即观测值的权阵和控制网的设计矩阵. 当  $r_i = 0$  时,  $L_i$  为完全必要观测, 改正数  $v_i = 0$ . 如果  $r_i$  较小, 发现粗差的能力很差, 这时它的可靠性便很低. 由于某一观测值的误差在所有观测值的改正数上的反映为

$$V^* = -R[0, 0, \dots, \epsilon_j, \dots, 0]^T.$$

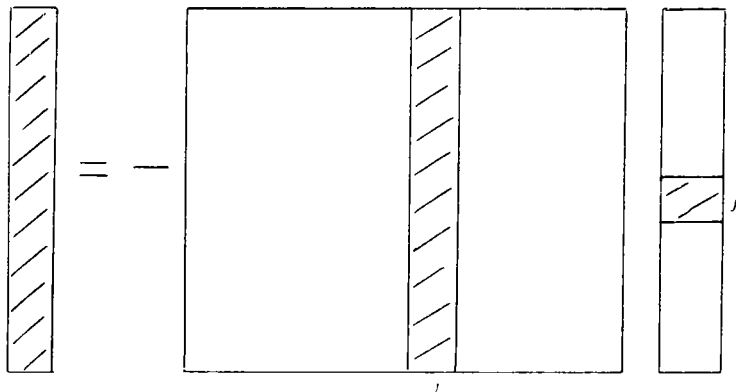


图 1 观测误差与改正数的关系

如果  $R$  矩阵中有两列向量线性相关(如  $i$  列与  $k$  列线性相关),则如果有粗差存在于  $L_i$  或  $L_k$  便无法区分. 因此控制网具有可区分性的充分必要条件是  $R$  矩阵中每两列之间线性无关. 从而当控制网的多余观测数少于必要观测数(即  $r < t$ )时,该网至少是局部误差不可区分的. 如果一个模型是误差不可区分的,则不管采用什么估计方法都难于得到正确的结果.

## 4 实例

### 4.1 六点相对定向

六点相对定向见图 2 所示.

这种情况下矩阵  $R$  为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.33 & -0.33 & -0.17 & 0.17 & -0.17 & 0.17 \\ & 0.33 & 0.17 & -0.17 & 0.17 & -0.17 \\ & & 0.08 & -0.08 & 0.08 & -0.08 \\ & & & 0.08 & -0.08 & 0.08 \\ & \text{对} & \text{称} & & 0.08 & -0.08 \\ & & & & & 0.08 \end{bmatrix}$$

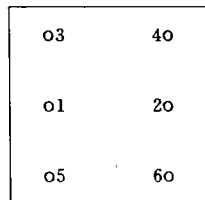


图 2 六点相对定向

$R$  的秩为 1,则  $R$  中的任意两列都线性相关,当观测值中存在粗差时可以发现,但不可定位,因为这时如果 1 点产生  $\Delta l$  的粗差,所求出的  $V$  与 2 点含有的  $-\Delta l$ ,3 点或 5 点含有的  $-2\Delta l$  粗差,以及 4 点或 6 点含有的  $2\Delta l$  粗差所产生的结果是相同的,因而六点相对定向对粗差是不可定位的. 如果采用粗差自动定位的方法进行平差,将难于得到正确的结果. 可能是因为  $L_1$  含有粗差  $\Delta l$ ,从而得出  $L_3$  含有一  $2\Delta l$  粗差的结果,事实上这样的结果比不平差还坏.

### 4.2 十点相对定向

十点相对定向见图 3 所示.

此时矩阵  $R$  为

1	2	3	3'	4	4'	5	5'	6	6'
0.40	-0.40	-0.10	-0.10	0.10	0.10	-0.10	-0.10	0.10	0.10
	0.40	0.10	0.10	-0.10	-0.10	0.10	0.10	-0.10	-0.10
		0.52	-0.48	-0.03	-0.03	0.02	0.02	-0.03	-0.03
			0.52	-0.03	-0.03	0.02	0.02	-0.03	-0.03
				0.52	-0.48	-0.03	-0.03	0.02	0.02
					0.52	-0.03	-0.03	0.02	0.02
对		称				0.52	-0.48	-0.03	-0.03
							0.52	-0.03	-0.03
								0.52	-0.48
									0.52

$R$  的秩为 5,  $R$  中的第 1 列与第 2 列线性相关, 则当  $L_1$  有粗差  $\Delta l$  时所产生的结果与  $L_2$  含有一  $\Delta l$  粗差时的相同, 因而十点相对定向是误差局部不可区分的情况。

#### 4.3 十二点相对定向

十二点相对定向见图 4 所示。

这种情况下矩阵  $R$  为

00	00
33'	44'
01	20
55'	66'
00	00

图 3 十点相对定向

00	00
33'	44'
11'	22'
00	00
55'	66'
00	00

图 4 十二点相对定向

1	1'	2	2'	3	3'	4	4'	5	5'	6	6'
0.67	-0.03	-0.17	-0.17	-0.08	-0.08	0.80	0.80	-0.08	-0.08	0.08	0.08
	0.67	-0.17	-0.17	-0.08	-0.08	0.80	0.80	-0.08	-0.08	0.08	0.08
		0.67	-0.33	0.80	0.80	-0.08	-0.08	0.08	0.08	-0.08	-0.08
			0.67	0.80	0.80	-0.08	-0.08	0.08	0.08	-0.08	-0.08
				0.54	-0.46	-0.04	-0.04	0.04	0.04	-0.04	-0.04
					0.54	-0.04	-0.04	0.04	0.04	-0.04	-0.04
						0.54	-0.46	-0.04	-0.04	0.04	0.04
对		称					0.54	-0.04	-0.04	0.04	0.04
								0.54	-0.46	-0.04	-0.04
									0.54	-0.04	-0.04
										0.54	-0.46
											0.54

$R$  的秩为 7,  $R$  中任意两列都线性无关, 因而可以采文(1)中的方法对粗差进行探测与定位。

从以上分析可以看出, 采用 6 个标准点的双点组(即十二点相对定向), 具有可发现性与可区分

性. 对当中的粗差不仅可发现,而且可定位. 若挑出一个粗差后,因有足够的多余观测量,故不必补测. 若采用十点相对定向,当发现点1或点2有粗差时,则不可能正确定位,此时必须对1,2两点重测. 若采用六点相对定向,则由于 $r_i$ 很小,发现粗差的能力很差;且发现粗差后无法进行定位,它的可靠性便很差. 因此,最优方案应采用十二点相对定向.

## 5 结论

一个控制网,当它的多余观测数较少时,其可靠性就较低. 如果多余观测数少于必要观测数,则该控制网至少是误差局部不可区分的. 对于误差不可区分的控制网,若采用抗差估计的方法企图对粗差进行自动定位,则平差结果将是不稳定和不可靠的. 所以,若要采用抗差估计,则必须先分析模型是否具备可区分性. 否则,当有粗差存在时,结果将是不可靠的.

### 参 考 文 献

- 1 王仁谦. 粗差探测与定位的一种新方法. 武汉测绘科技,1994,(1):39~42
- 2 李德仁. 误差处理与可靠性理论. 北京:测绘出版社,1988. 120~200
- 3 彭先进. 测量控制网的优化设计. 武汉:武汉测绘科技大学出版社,1991. 112~129
- 4 黄幼才. 数据探测与抗差估计. 北京:测绘出版社,1990. 70~75

## Reliability of Control Net for Measuring

Wang Renqian

(Dept. of Civil Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

**Abstract** With respect to control net for measuring, the author discusses the characters of discoverable and distinguishable and their importance in optimizing design; and advances a method for judging the characters of discoverable and distinguishable.

**Keywords** reliability, control net, measuring