第 16 卷 第 4 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 16 No. 4
1995 年 10 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Oct. 1995

货郎担问题的新解法及其算法设计*

张 银 明

(华侨大学电子工程系，泉州 362011)

摘要　货郎担问题是运筹学中的一个著名命题，目前使用分技定界法及动态规划方法求解. 本文介绍使用元素判别值进行求解的新方法及其算法设计和程序实现，它比现行方法简易有效.

关键词　运筹学，货郎担问题，元素判别值，算法设计

分类号　O 22

货郎担问题一般可归结为：有 n 个城市 $A_1, A_2, \cdots, A_n$. 已知从 A_i 城到 A_j 城的旅费或距离为 C_{ij}，得 n 阶矩阵 $C=(C_{ij})$. 货郎从某城出发，遍历其它 $n-1$ 个城市各一次，最后返回出发点. 求总旅费最少(或总距离最短)的路径. 令

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若从 } A_i \text{ 城到 } A_j \text{ 城；} \\ 0, & \text{若从 } A_i \text{ 城不到 } A_j \text{ 城.}\end{cases}$$

则问题的数学模型为

$$\min Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}x_{ij}, \tag{1}$$

其约束条件为：(1) 从 A_i 城不到 A_i 城，即 $A_{ii}=0\ (i=1,2,\cdots,n)$；(2) 恰有一次到达 A_j 城，即 $\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1\ (j=1,2,\cdots,n)$；(3) 恰有一次离开 A_i 城，即 $\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1\ (i=1,2,\cdots,n)$；(4) 避免出现 $k-1$ 个城的闭回路，即 $x_{i_1i_2}+x_{i_2i_3}+\cdots+x_{i_{k-1}i_1}\leqslant k-2$，其中 $k=1,2,\cdots,n$；$i_1,\cdots,i_{k-1}$两两不相等；(5) $x_{ij}=0$ 或 1 $(i,j=1,2,\cdots,n)$.

这就是著名的货郎担问题的一般化模型. 目前用于该问题求解的方法有分技定界法和在 n 不大时求解的动态规划方法[1]. 但因为方法的极限性，故在算法上还有许多问题. 作者研究的元素判别值分配法[2]，可用于货郎担问题的求解，且一次求解便可取得最优解. 这是一种具有创新性和通用性的方法.

1　定义及其数学模型

使用元素判别值求解货郎担问题的关键在于计算元素判别值及制定分配原则.

1.1　定义及其数学模型

定义 1　由四个元素 $x_{ij}, x_{i,j+k}, x_{i+L,j}, x_{i+L,j+k}$为顶点所组成的闭合回路，称为矩形回路.

---

* 本文 1995-03-02 收到

其中 $i,j=1,2\cdots,n$；$1-i\leqslant L\leqslant n-i$ 且 $L\neq 0$；$1-j\leqslant k\leqslant n-j$ 且 $k\neq 0$（下同）.

设 $\Delta x_{ij}=C_{ij}-C_{i,j+k}+C_{i+L,j+k}-C_{i+L,j}$，那么称 Δx_{ij} 为元素 x_{ij} 在矩形回路 $x_{ij}-x_{i,j+k}-x_{i+L,j+k}-x_{i+L,j}$ 的检验数．

定义 2　在 $n\times n$ 阶矩阵中，以 x_{ij} 为顶点的全部矩形回路中，其检验数小于零的个数，称为元素 x_{ij} 的判别值．

任一元素 x_{ij}，以它为顶点的所有矩形回路有 $(n-1)^2$ 个，因而它的判别值可能取值为 0～$(n-1)^2$. 如果定义函数

$$f_s(\Delta x_{ij})=\begin{cases}1, & 当\ \Delta x_{ij}<0;\\ 0, & 当\ \Delta x_{ij}\geqslant 0.\end{cases}$$

那么，若以 $\mathrm{d}x_{ij}$ 表示元素 x_{ij} 的判别值，则

$$\mathrm{d}x_{ij}=\sum_{s=1}^{(n-1)(n-1)}f_s(\Delta x_{ij})=\sum_{s=1}^{(n-1)^2}f_s(C_{ij}-C_{i,j+k}+C_{i+L,j+k}-C_{i+L,j}),\qquad(2)$$

式(2)便是元素判别值的数学模型．

1.2　求解原则

原则 1　按照元素判别值的大小顺序选取城市，其判别值越大优先级越高．

原则 2　若元素的判别值相同，则其旅费（或距离）越小，相应的优先级越高；如旅费（或距离）也相同，便按元素的下标顺序确定．

原则 3　当元素 x_{ij} 被选中，则第 i 行、第 j 列的所有元素及 x_{ji} 便失去被选取权．

2　货郎担问题的求解

若用人工使用元素判别值求解货郎担问题，则其求解步骤可归结如下：

（1）列出货郎担问题的初始求解表；

（2）计算各元素的判别值 $\mathrm{d}x_{ij}$；

（3）按照求解原则进行求解；

（4）计算旅费（或距离）；

（5）给出最优方案.

现以钱颂迪教授主编的《运筹学》§7 货郎担问题中的例子来说明新解法的求解方法[3]. 该例有四个城市，其距离如图 1 所示．

城市	城市 1	城市 2	城市 3	城市 4
城市 1	0	8	5	6
城市 2	6	0	8	5
城市 3	7	9	0	5
城市 4	9	7	8	0

图 1　城市间距离表

下面介绍用元素判别值求解的过程.

（1）建立货郎担问题求解初始图，如图 2 所示．各元素 x_{ij} 左上方小格中的数字表示距离.

（2）计算元素判别值 $\mathrm{d}x_{ij}(i,j=1,2,\cdots,4)$. 由于不许货郎从 i 城到 i 城，因而可将 $C_{ii}=0$ 改为足够大的正数 M，此以∞表示．由于 $n=4$，故元素判别值的取值范围为 0～9. 下面不妨以 x_{12} 为例，说明元素判别值的计算方法．现简述如下．

城　市	城市 1	城市 2	城市 3	城市 4	城市数
城市 1	∞　$x11$	8　$x12$	5　$x13$	6　$x14$	1
城市 2	6　$x21$	0　$x22$	8　$x23$	5　$x24$	1
城市 3	7　$x31$	9　$x32$	0　$x33$	5　$x34$	1
城市 4	9　$x41$	7　$x42$	8　$x43$	0　$x44$	1
城市数	1	1	1	1	4 4

图 2　贷郎担问题求解初始图

矩形回路	检　验　数	$f_s(\Delta x_{ij})$
$x_{12}-x_{22}-x_{21}-x_{11}$	$8-M+6-M<0$	1
$x_{12}-x_{22}-x_{23}-x_{13}$	$8-M+8-5<0$	1
$x_{12}-x_{22}-x_{24}-x_{14}$	$8-M+5-6<0$	1
$x_{12}-x_{32}-x_{31}-x_{11}$	$8-9+7-M<0$	1
$x_{12}-x_{32}-x_{33}-x_{13}$	$8-9+M-5>0$	0
$x_{12}-x_{32}-x_{34}-x_{14}$	$8-9+5-6<0$	1
$x_{12}-x_{42}-x_{41}-x_{11}$	$8-7+9-M<0$	1
$x_{12}-x_{42}-x_{43}-x_{13}$	$8-7+8-5>0$	0
$x_{12}-x_{42}-x_{44}-x_{14}$	$8-7+M-6>0$	0

因而，$\mathrm{d}x_{12}=\sum_{s=1}^{9} f_s(\Delta x_{ij})=6$. 类似的可计算其他各元素的判别值，如图 3 各元素右下方格所示.

城　市	城市 1	城市 2	城市 3	城市 4	城市数
城市 1	∞　$x11$ 0	8　$x12$ (*)　6	5　$x13$ 1　7	6　$x14$ 5	1 *(1)
城市 2	6　$x21$ 1　7	∞　$x22$ 0	8　$x23$ 5	5　$x24$ 6	1 *(3)
城市 3	7　$x31$ (*)　6	9　$x32$ 5	∞　$x33$ 0	5　$x34$ 1　7	1 *(2)
城市 4	9　$x41$ 5	7　$x42$ 1　7	8　$x43$ (*)　6	∞　$x44$ 0	1 *(4)
城市数	1 *(3)	1 *(4)	1 *(1)	1 *(2)	4 4

图 3　贷郎担问题—元素判别值求解分配图

(3) 按元素判别值及分配原则进行求解．由图 3 可见，判别值最大为 7，且有 4 个元素．它们是 x_{13}、x_{21}、x_{34}及 x_{42}，而距离以 5 为最小，且 x_{13}在前，所以置 $x_{13}=1$. 同时，给第 1 行及第 3 列设志 *(1)，并给 x_{31}标上(*)．余下 3 个元素判别值为 7 的元素中，以 x_{34}的距离最小，则置 $x_{34}=1$. 同样置第 3 行及第 4 列的标志为 *(2)，并给 x_{43}标上(*)．在 x_{21}和 x_{42}中，x_{21}距离最小，则 $x_{21}=1$. 给第 2 行及第 1 列标上 *(3)，且置 x_{12}为(*).

现在仅余下第 4 行第 2 列，置 $x_{42}=1$. 给第 4 行及第 2 列标上 *(4). 至此，已求解完毕．

(4) 计算旅行方案的距离．该方案的最短距离为 $C_{13}+C_{21}+C_{34}+C_{42}=5+6+5+7=23$.

(5) 旅行路线则为城市 1→城市 3→城市 4→城市 2→城市 1.

这些结果同原书使用动态规划求解的结果是完全一致的．

为说明元素判别值求解法的可行和有效，不妨再举一例，即吴文江等教授编著的《实用数学规划》第七章第四节货郎问题中所举的例题．该题有 5 个城市，城间旅费如图 4 所示($C_{13}=0$，原例如此).

城 市	城市 1	城市 2	城市 3	城市 4	城市 5
城市 1	0	2	0	6	1
城市 2	1	0	4	4	2
城市 3	5	3	0	1	5
城市 4	4	7	2	0	1
城市 5	2	6	3	6	0

图 4　城市间的旅费

现介绍用元素判别值分配法求解过程.

(1) 列出求解初始图如图 5 所示．

城　市	城市 1	城市 2	城市 3	城市 4	城市 5	城市数
城市 1	0　$x11$	2　$x12$	0　$x13$	6　$x14$	1　$x15$	1
城市 2	1　$x21$	0　$x22$	4　$x23$	4　$x24$	2　$x25$	1
城市 3	5　$x31$	3　$x32$	0　$x33$	1　$x34$	5　$x35$	1
城市 4	4　$x41$	7　$x42$	2　$x43$	0　$x44$	1　$x45$	1
城市 5	2　$x51$	6　$x52$	3　$x53$	6　$x54$	0　$x55$	1
城市数	1	1	1	1	1	4 4

图 5　货郎担问题求解初始图

(2) 按数学模型(2)计算各元素的判别值 dx_{ij}. 由于计算简易，可用口算，因而不再详述．其结果填入图 6 各元素的右下小格之中．

城　市	城市 1	城市 2	城市 3	城市 4	城市 5	城市数
城市 1	∞　$x11$ 　0	2　$x12$ *　12	0　$x13$ 1　11	6　$x14$ 　7	1　$x15$ 　10	1 *(4)
城市 2	1　$x21$ 1　12	∞　$x22$ 　0	4　$x23$ 　7	4　$x24$ 　11	2　$x25$ *　10	1 *(2)
城市 3	5　$x31$ *　8	3　$x32$ 　11	∞　$x33$ 　0	1　$x34$ 1　13	5　$x35$ 　8	1 *(1)
城市 4	4　$x41$ 　8	7　$x42$ 　8	2　$x43$ 　12	∞　$x44$ 　0	1　$x45$ 1　12	1 *(3)
城市 5	2　$x51$ 　11	6　$x52$ 1　9	3　$x53$ 　10	6　$x54$ *　9	∞　$x55$ 　0	1 *(5)
城市数	1 *(2)	1 *(5)	1 *(4)	1 *(1)	1 *(3)	5 5

图 6　货郎担问题求解分配图

(3) 求解．$dx_{34}=13$ 为最大，置 $x_{34}=1$，并作相应标志．x_{12}，x_{21}，x_{43}，x_{45}的判别值皆为 12，其 C_{21}和 C_{45}最省，由于 x_{21}在前，故置 $x_{21}=1$. 第 2 行、第 1 列及 x_{12}作相应标志．

判别值为 12 的元素中，x_{12}及 x_{43}已失去分配权，只余下 x_{45}，故 $x_{45}=1$. 并给第 4 行、第 5 列

及 x_{54} 作标志．余下未分配的元素中，判别值最大为11，而旅费最省为 $C_{13}=0$. 故置 $x_{13}=1$，且作相应标志．最后只剩下 x_{52} 有分配或被选取权，则置 $x_{52}=1$. 至此已求解完成，其结果由图6给出．

(4) 旅行总费用为 $C_{13}+C_{34}+C_{45}+C_{52}+C_{21}=9$.

(5) 旅行路线为城市1→城市3→城市4→城市5→城市2→城市1.

其结果也与原书一致，但原书由于使用分技定界法，显得较复杂．

3 算法设计

使用元素判别值求解货郎担问题可由程序实现，其相应算法简述如下：

(1) 输入城市数目 n 及城市名称 $\Rightarrow CN(i)$ $(i=1,\cdots,n)$；

(2) 输入城市间距离或旅费 $\Rightarrow C(i,j)$ $(i,j=1,\cdots,n)$；

(3) 置 $C(i,i)$ 为一个足够大的正数，则

$$M\Rightarrow C(i,i),\ i=1,2,\cdots,n;$$

(4) 按公式(2)计算元素判别值，则

$$\sum_{s=1}^{(n-1)^2} f_s(C_{ij}-C_{i+L.j}+C_{i+L.j+k}-C_{i.j+k})\Rightarrow \mathrm{d}v(i,j),$$

其中 $i,j=1,2,\cdots,n$；$1-i\leqslant L\leqslant n-i$ 且 $L\neq 0$；$1-j\leqslant k\leqslant n-j$ 且 $k\neq 0$；

(5) $0\Rightarrow A(i,j)$，$1\Rightarrow A(i,n+1)$，$1\Rightarrow A(n+1,i)$，$i,j=1,2,\cdots,n$；

(6) $A(i,n+1)$ 或 $A(n+1,i)$ 中尚有大于0的元素？如有则执行(7)，否则转(9)；

(7) 从尚未标志的行、列及元素中选取元素判别值最大的元素；如有多个便选取距离或旅费最小者；若仍有同值者，则按下标顺序选取第一个，其下标分别送 i_1 及 j_1；

(8) $1\Rightarrow A(i_1,j_1)$，$0\Rightarrow A(i_1,n+1)$，$0\Rightarrow A(n+1,j_1)$，而且给 $A(j_1,i_1)$，标上标志"*"；转(6)；

(9) 计算旅行的路程总距离或总费用；

(10) 给出旅行路线；

(11) 存贮结果及数据；

(12) 结束．

根据以上算法在微机上使用 FOXBASE 所编制的程序系统．这包括输入、维护、查询、计算及输出等功能模块，称为《元素判别值求解货郎担问题系统》. 该系统用于求解第一个例题，可输出如下结果：

≪货郎担问题新解法——元素判别值分配法≫

问题名称：运筹学修订版例题

城市点数目 ： 4个 城市名称为

城市1 ； 城市2 ； 城市3 ； 城市4 ；

城市之间的距离或旅费为

24：：	1⇒	0.00；	8.00；	5.00；	6.00；
24：：	2⇒	6.00；	0.00；	8.00；	5.00；
24：：	3⇒	7.00；	9.00；	0.00；	5.00；
24：：	4⇒	9.00；	7.00；	8.00；	0.00；

(＊)(＊)＝元素判别值：

V11＝0；	V12＝6；	V13＝7；	V14＝5；
V21＝7；	V22＝0；	V23＝5；	V24＝6；
V31＝6；	V32＝5；	V33＝0；	V34＝7；
V41＝5；	V42＝7；	V43＝6；	V44＝0；

调配方案如下：

起点城市名称		终点城市名称	调配数量
城市 1	⇒	城市 3	1
城市 3	⇒	城市 4	1
城市 4	⇒	城市 2	1
城市 2	⇒	城市 1	1

最省耗费为　　23.00

计算与调配所需时间：　开始时间:18：36：49　　结束时间:18：37：03

同样，用于求解第二个例题，其结果为

≪货郎担问题新解法——元素判别值分配法≫

问题名称：实用数学规划例题

城市点数目：　5 个　　城市名称为

城市 1　；　城市 2　；　城市 3　；　城市 4　；　城市 5　；

城市之间的距离或旅费为

23：：	1⇒	0.00；	2.00；	0.00；	6.00；	1.00；
23：：	2⇒	1.00；	0.00；	4.00；	4.00；	2.00；
23：：	3⇒	5.00；	3.00；	0.00；	1.00；	5.00；
23：：	4⇒	4.00；	7.00；	2.00；	0.00；	1.00；
23：：	5⇒	2.00；	6.00；	3.00；	6.00；	0.00；

(＊)(＊)＝元素判别值：

V11＝0；	V12＝12；	V13＝11；	V14＝7；	V15＝10；
V21＝12；	V22＝0；	V23＝7；	V24＝11；	V25＝10；
V31＝8；	V32＝11；	V33＝0；	V34＝13；	V35＝8；
V41＝8；	V42＝8；	V43＝12；	V44＝0；	V45＝12；
V51＝12；	V52＝9；	V53＝10；	V54＝9；	V55＝0；

调配方案如下：

起点城市名称		终点城市名称	调配数量
城市 1	⇒	城市 3	1
城市 3	⇒	城市 4	1
城市 4	⇒	城市 5	1
城市 5	⇒	城市 2	1
城市 2	⇒	城市 1	1

最省耗费为　　9.00

计算与调配所需时间：　开始时间:18：36：22　　结束时间:18：36：49

从上述二例可看出，所求的最佳旅行路线与耗费皆同原书一致，也同手工求解一致．而所花时间分别为 14 s 和 27 s．虽然因限于运行环境、速度较慢，但说明该算法和程序是可行和有效的．

4 结束语

元素判别值求解法为货郎担问题的求解找到一个简易、可行和有效的新方法．使用该方法不但可以求解货郎担问题，还可以求解调运问题及部分指派问题．它要成为一种通用的求解方法，关键在于元素判别值，故对它的进一步研究不仅有理论上的意义，而且有实用价值．

参考文献

1 吴文江，袁仪方．实用数学规划．北京：机械工业出版社，1993. 227～238
2 张银明．调运问题的新解法——元素判别值分配法的研究与实现．华侨大学学报(自然科学版)，1994，15(4)：447～453
3 钱颂迪．运筹学．修订版．北京：清华大学出版社，1990. 79～102

A New Solution of Travelling Salesman Problem and the Design of Its Algorithm

Zhang Yinming

(Dept. of Comp. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract As a famous proposition in operation research, travelling salesman problem is solved by branch bound method and the method of dynamic programming at present. The author proposes a new method of element discrimination value with its algorithm design and program execution. The new method is proved to be simpler and more efficient than the existing ones.

Keywords operation research, travelling salesman problem, element discrimination value, algorithm design