

在复杂边值条件下非稳态肋片 传热的最优化(Ⅱ)*

樊未军 杨翔翔

(华侨大学化工与生化工程系, 泉州 362011)

摘要 研究了在辐射和对流同时作用下肋根温度作周期性变化时矩形肋片的传热特性. 首先对主控微分方程组进行离散化处理, 并借助数值计算方法进行求解, 然后详细分析了肋片的温度分布与各种热特性参数的变化规律. 建立了非稳态肋片传热的温度边界层新概念.

关键词 离散化, 数值计算, 热特性参数

分类号 TK 124

文[1]已经推导出在辐射和对流同时作用下, 肋根温度作周期性变化时, 矩形肋片传热的主控微分方程式. 当辐射热流密度 $q_r(y)$ 沿肋高方向变化时, 作精确解已不可能, 必须借助数值计算方法进行求解.

1 方程组的离散化处理

重写主控微分方程式如下

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{k}{\rho c} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho c \cdot b \cdot T_m} [2h\theta + 2q_r(y)], \quad (1)$$

边界条件为:

$$y = 0, \theta(0, \tau) = 1 + \varepsilon_a \cos \omega \tau,$$

$$y = H, \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0.$$

又有

$$q_r(y) = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} (\sigma T^4 - B(y)), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} B(y) = & q_r(y) + \int_0^H B(y) dF_{dA_y-dA_{y'}} + \sigma T_i^4 dF_{dA_y-A_0} \\ & + \int_0^L B_w(z) dF_{dA_y-dA_z}. \end{aligned} \quad (3)$$

* 本文 1994-11-12 收到; 振兴中华教育科学基金会启动基金资助项目

$$B_w(z) = \epsilon \sigma T_w^4 + (1 - \epsilon) \left[2 \int_0^H B(y) dF_{dA_z-dA_y} + \sigma T_f^4 dF_{dA_z-A_0} \right] \quad (4)$$

上述式(1)~(4)四个方程式是完全封闭的. 只要对上述四个方程式分别进行离散化处理^[2], 并代入初值和边值条件, 即可求出相应的温度分布和传热量.

对式(1)进行离散化, 可得

$$\theta(i, j+1) = N_1 \theta(i+1, j) + N_2 \theta(i, j) + N_3 \theta(i-1, j) - N_3 q_r[i], \quad (5)$$

式中,

$$N_1 = \frac{kt}{\rho c (\Delta y)^2}, N_2 = \left(1 - \frac{2tk}{\rho c (\Delta y)^2 T_m} - \frac{2th}{\rho cb T_m} \right), N_3 = \frac{2t}{\rho cb T_m}.$$

边界条件离散化为:

$$\theta(0, j) = 1 + \epsilon_s \cos \omega t \text{ 和 } \theta(n-1, j) = \theta(n+1, j),$$

式(2)可离散化为

$$q_r[i] = B[i] - I[1] - I[2] - \sigma T_f^4 \cdot \frac{L}{2L+H}, \quad (6)$$

式(3)可离散化为

$$B[i] = \sigma (\theta(i, j) \cdot T_m + T_f)^4 - \frac{1-\epsilon}{\epsilon} \cdot q_r[i], \quad (7)$$

式(4)可离散化为

$$B_w[i] = \epsilon \sigma T_w^4 + 2 \cdot (1 - \epsilon) \cdot I[3] + \sigma T_f^4 \cdot \frac{L}{L+2H}, \quad (8)$$

式中,

$$I[1] = \int_0^H B(y) dF_{dA_y-dA_y}, I[2] = \int_0^L B_w(z) dF_{dA_y-dA_z}, I[3] = \int_0^H B(y) dF_{dA_z-dA_y}.$$

应用复化求积公式便可求得积分的上列诸式的离散解.

2 数值计算

在没有实验数据作为对照的前提下, 当肋根温度作周期性变化时, 肋片内部温度的计算值都在时刻变化, 因此很难判断计算机计算到什么程度就达到了要求.

就本课题而言, 热特性参数为常数时, 肋片温度只是位置坐标 y 和时间坐标 τ 的函数. 而当时间变化时肋根温度是周期性变化的, 所以在周期性作用下, 当肋片传热达到准稳态时, 肋片在一个周期内传导出的热量为一常数. 也就是说肋片某点的温度值, 在下一个周期的同一时刻, 又达到了同一个温度值. 在计算中, 当 $|\theta[i, j] - \theta[i, k]|$ 小于等于 ζ 时, 我们便可认为计算已获得了满意的解.

在本课题的离散化方程中, N_1 为傅利叶准则, N_2 为傅利叶准则和毕渥准则之多项式组合, N_3 经推演后也可化为傅利叶准则. 为了制表方便除肋高和温度取无量纲外, 其他都为具体的数值. 如果要推广, 只要把结果代入 N_1, N_2 和 N_3 这三个准则数即可. 这里取铝制肋片为例, 具体参数如下: $\epsilon=0.26$, $\sigma=5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$, $H=0.1 \text{ m}$, $L=0.1 \text{ m}$, $T_f=293 \text{ K}$, $b=0.005 \text{ m}$, $h=40 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$, $k=236 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$, $\rho=2710 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $c=902 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

3 结果分析

3.1 肋片温度 θ 随肋高 y/H 的变化

如图 1 所示, 当 $\omega\tau$ 变化时四条曲线都有不同程度波动. 但是值得注意的是当 y/H 小于 0.4 时, 曲线波动的幅度较大, 肋片内部的温度处于极度不稳定状态, 肋片内部温度梯度也在时刻变化. 有时正, 有时负, 有时甚至还为 0, 出现肋片内部温度为极值的点. 而当 y/H 大于等于 0.4 时这几条曲线趋于一致, 曲线之间的波动很小, 并且它们同时趋于肋根温度不变时的值. 所以从温度分布来讲, 肋片可以被分为两部分: 一部分为波动区, 我们引入并称之为温度边界层; 另一部分为稳定区. 这种划分是有价值的, 当我们要知道肋片在稳定区的温度时我们只需按肋根温度为常数时的定解问题来求解, 这样可以简化求解过程.

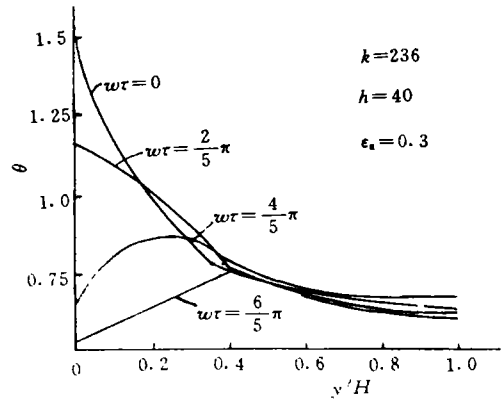


图 1 θ 随 y/H 的变化关系

为了进一步研究温度边界层, 我们可以推测, 边界层的厚度应受到导热系数 k , 对流换热系数 h , 以及肋根温度波动频率 ω 的影响. 所以, 我们可以假设有这么一个无量纲准则数 $B = \frac{\omega \cdot k}{h}$. 通过计算我们可以拟合出一个 B 的值, 当它为某一值时, 可以得到一个合适的较薄的边界层, 这样便可以找到一个普遍适用的肋片温度变化规律.

如图 2 至图 5 所示, 经过反复验算发现, 当 B 大于 0.16 且小于 0.61 时, 因肋根温度周期性变化所造成的肋片内部的温度波动, 几乎只发生于 y/H 小于等于 0.2 的区域. 当 y/H 大于等于 0.2 时, 肋片温度几乎不发生波动.

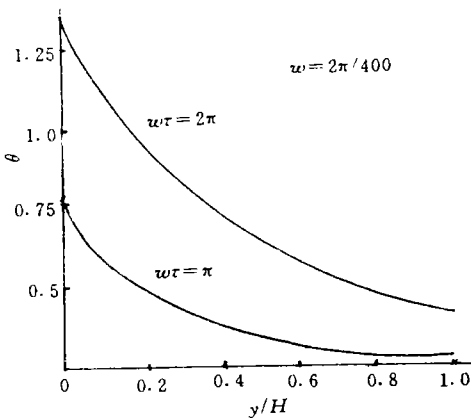


图 2 不同 ω 下的 $\theta-y/H$ 曲线

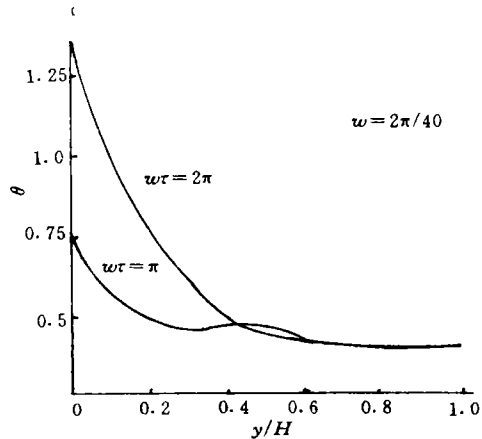


图 3 不同 ω 下的 $\theta-y/H$ 曲线

经过计算分析之后, 确实证明存在这么一个温度边界层, 即只要 B 准则取得合适, 在 $y/H \leq 0.2$ 这个区域内我们认为就是温度的边界层.

肋片中温度边界层的概念是全新的. 它对研究不稳态传热, 特别是对周期性边界条件下

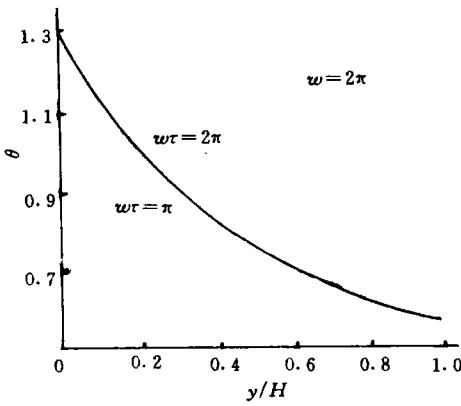


图 4 不同 ω 下的 θ - y/H 曲线

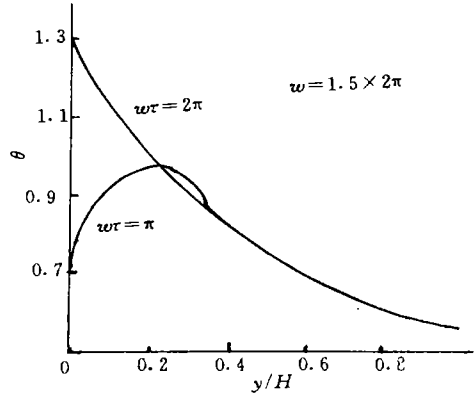


图 5 不同 ω 下的 θ - y/H 曲线

的传热研究有着理论指导意义。借助这个概念,在求解实际问题时可搞简化模型。即只要研究边界层内部的温度变化即可,使本来较复杂的问题得到简化。同时,这也给不稳定传热研究提出了一种新的思路。

3.2 肋片温度 θ 随导热系数 k 的变化

从图 6 可知,当导热系数较大时,肋片温度沿肋高变化较小。当导热系数较小时,肋片温度沿肋高有较大幅度的下降。对于采用良导热体材料制作的肋片,当温度不等时,肋片内部热量很快从高温区向低温区传递,使其内部温度趋于一致。但是对于不良导热体材料而言,情况正好相反。

3.3 肋片温度 θ 随对流换热系数 h 的变化

由图 7 可看出, θ - y/H 曲线是随对流换热系数变化的。当 h 从小到大变化时,在同一 y/H 值处,此曲线的斜率也是从小向大变化的。这说明对流换热愈强,肋片传出的热量愈多。

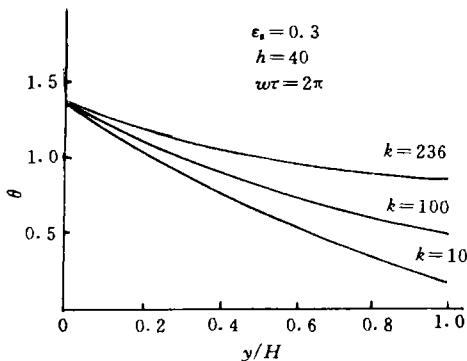


图 6 θ 随 k 的变化

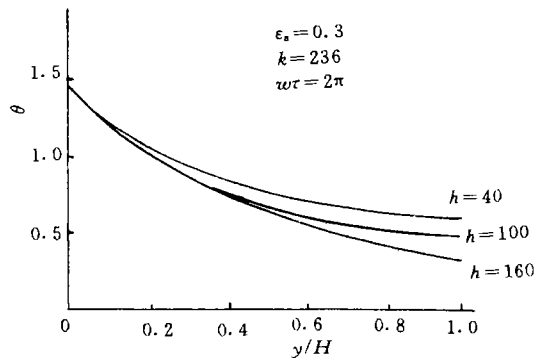


图 7 从 θ 随 h 的变化

3.4 肋片温度 θ 随温度波动系数 ϵ_s 的变化

ϵ_s 是肋根温度的波动系数。从图 8 可见, ϵ_s 的变化对肋片内部温度的影响是非常强烈的。 ϵ_s 等于 0.1 的曲线相对于 ϵ_s 等于 0 时的曲线,中部略有上移,但是当 ϵ_s 等于 0.3 时曲线会出现

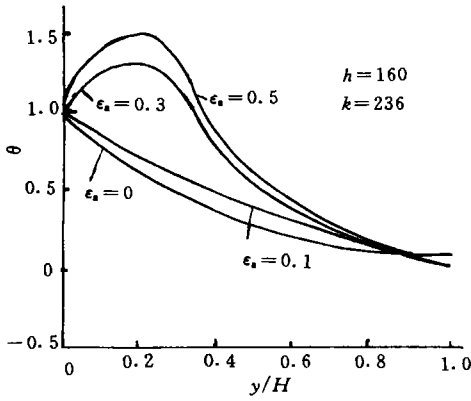


图 8 θ 随 ϵ_s 的变化

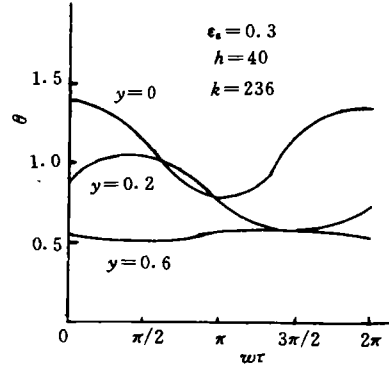


图 9 θ 随 τ 的变化

剧烈波动,而且曲线前半段温度梯度会出现零值,即中间温度有极值,这在无内热源,肋根温度为常数的情况下是绝对不会发生的. ϵ_s 愈大这种波动程度愈大.

3.5 在肋片的某一特定点处肋片温度 θ 随时间 τ 的变化

令 Y 等于 y/H ,从图 9 中可以看出,当 Y 愈大时, θ 波动愈小,这在前面已讨论过. 如果肋根温度发生波动,肋片内部各点温度也会发生波动,但是波动的周期却是相同的,这与精确解的结论是一致的.

从图 9 中还可以发现, Y 等于 0 的曲线与 Y 等于 0.2 的曲线相差 $\frac{\pi}{2}$ 的相位角, Y 等于 0.6 与 Y 等于 0.2 的曲线相差 π 个相位角,由此可以推断出,肋高从 0 至 1.0 两点之间,其温度波动的相位角正好相差 $\frac{5}{2}\pi$.

3.6 肋片温度 θ 随黑度 ϵ 的变化

从图 10 可以看出,当黑度 ϵ 从 0.26~0.8 变化时,在同一个 y/H 处, θ 随 ϵ 的增加而减小.

文中的符号分别代表: $B(y)$ 为肋片肋面的有效辐射; W ; B_i 为毕渥准则; b 为肋片根部厚度,m; c 为比热, $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$; $dF_{dA_y-A_y'}$ 为 dA_y 对 $dA_{y'}$ 的角系数; $dF_{dA_y-A_0}$ 为 dA_y 对 A_0 的角系数; $dF_{dA_y-dA_x}$ 为 dA_y 对 dA_x 的角系数; $dF_{dA_x-dA_y}$ 为 dA_x 对 dA_y 的角系数; $dF_{dA_x-A_0}$ 为 dA_x 对 dA_0 的角系数; H 为肋高,m; h 为对流换热系数, $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$; k 为导热系数, $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$; L 为肋间距,m; q_r 为辐射热流密度,W; q_h 为总的对流换热量,W; T 为肋片温度,K; T_i 为环境温度,K; T_m 为肋根平均温度,K; T_w 为肋片根部温度,K; α' 为吸收率; ϵ 为黑度; ϵ_s 为相对的肋片温度波动幅度系数; ρ 为密度, $kg \cdot m^{-3}$; ρ' 为反射率; σ 为玻尔兹曼常数, $W \cdot m^{-3} \cdot K^{-4}$; τ 为时间变量,s; ω 为波动频率; θ 为无因次肋片温度.

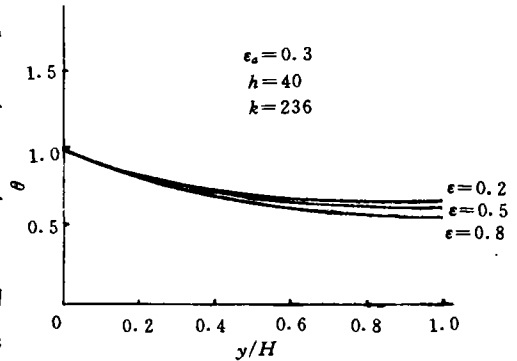


图 10 θ 随 ϵ 的变化

参 考 文 献

- 1 樊未军,杨翔翔.在复杂边值条件下非稳态肋片传热的最优化(Ⅰ).华侨大学学报(自然科学版),1995. 16(2):328~332
- 2 邓建中.计算方法.西安:西安交通大学出版社,1992.1~118

Optimization of Unsteady Heat Transfer of a Fin under Complex Boundary Value Conditions (Ⅱ)

Fan Weijun Yang Xiangxiang

(Dept. of Chem. & Biochem. Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract The heat transfer performance of a rectangular fin during periodic fin base temperature change is studied under simultaneous action of radiation and convection. In this part, the main control differential equation is discretized and then solved by numerical calculation; and the regular pattern of change of temperature distribution in the fin with various thermal characteristic parameters is analyzed in detail; and a new concept of temperature boundary layer of unsteady finned heat transfer is set up.

Keywords discretization, numerical calculation, thermal characteristic parameters