

开洞薄壁杆件侧向稳定*

王 全 凤

(华侨大学土木工程系, 泉州 362011)

摘要 根据能量原理,借助于变分法导出一个考虑薄壁杆件扭转和翘曲变形影响的侧向稳定特征方程.利用 Galerkin 加权余量法计算简支、跨中点荷载的开洞薄壁杆件的临界荷载.

关键词 侧向稳定,薄壁杆件,加权余量

分类号 TU 323.01

跨度中间无侧向支撑的薄壁杆件,如果横向点荷载施加在抗弯刚度比其侧向抗弯刚度和抗扭刚度又大得多的弯曲平面内,就可能先于强度破坏而丧失稳定.失稳时,除了产生弯曲变形外,主要还产生扭转和翘曲变形.因此,薄壁杆件的侧向稳定问题不同于古典 Euler 稳定理论,比一般杆件的侧向稳定更为复杂.

因为薄壁杆件日益广泛应用在高层建筑、桥梁等土木工程上,它的稳定问题更为突出.过去,大量的研究工作集中在薄壁杆件的轴压和纯弯稳定问题上,对它的侧向稳定研究相对少了点.在众多的分析方法中,有限单元法至今被认为能有效地计算薄壁杆件失稳时的临界荷载^[1~3].但是,这种方法需要大容量的计算机和较长的计算机运行时间,限制了它在实际设计中运用.在近几年,许多研究努力集中在提出一种既简便又比较精确的薄壁杆件稳定分析方法.在古典的薄壁杆件侧向稳定分析中^[4,5],假定失稳时横向临界荷载与纯弯状态下简支薄壁杆件失稳时临界荷载的闭合解有关,用一个所谓的弯矩修正因子来修正由于侧向点荷载引起的,在弯曲平面内的弯矩不均匀分布,但是这种分析方有可能导致不必要的保守设计^[6].在众多的数值分析方法中,能量法是最奏效.例如 Thevendran 等人用能量法成功地预见双轴对称工字型梁的侧向失稳,无量纲的临界荷载是借助于 Simpson 法则数值积分而来,以及最优化技术在那里得到运用^[7].本文研究的目的是在能量原理的基础上,提出一个简单实用的数值方法来计算薄壁杆件侧向稳定的能力.利用 Galerkin 加权余量法导出在横向点荷载作用下薄壁杆件的临界荷载表述式.因为在实际工作中,薄壁杆件的开孔是不可避免的,本文有意识地选择开洞薄壁杆件为例来说明本方法的实际应用.虽然本文计算横向临界点荷载的公式是来自简支薄壁杆件,但它的原理也适合于自由端受点荷载的悬臂薄壁杆件.在本文研究中,采用了 Vlasov 薄壁杆件理论中两个常用的假设^[4]:

- (a) 薄壁杆件横截面是刚性的;
- (b) 忽略了杆壁中截面上的剪切变形.

* 本文 1995-04-19 收到

1 侧向稳定特征方程

如图1所示,薄壁杆件的跨度为 $2L$,横向点荷载 P 作用在跨中.当薄壁杆件屈曲时,杆件的总势能

$$\Pi = U + V, \quad (1)$$

式中 U 是杆件的弯曲、扭转和翘曲变形产生的应变能;

V 是由于施加的横向点荷载引起的势能.

由于结构屈曲模态的对称性,考虑半结构进行稳定分析.它的应变能^[5]

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L [EI_y(u'')^2 + GJ_d(\Phi')^2 + EI_w(\Phi'')^2] dz, \quad (2)$$

式中 u 为截面剪力中在 x 方向的位移增量; Φ 为截面对 z 轴的扭转角; EI_y, EI_w 和 GJ_d 分别表示杆件的侧向弯曲刚度、翘曲刚度和它的扭转刚度.

当横向点荷载施加在跨中截面形心时,荷载势能^[5]

$$V = -P \int_0^L \Phi \cdot u''(L-z) dz \quad (3)$$

把式(2),(3)代进式(1),得

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L [EI_y(u'')^2 + GJ_d(\Phi')^2 + EI_w(\Phi'')^2 - 2P \cdot \Phi \cdot u''(L-z)] dz. \quad (4)$$

最小势能原理指出,在截面所有可能位移中,真实位移使总势能取最小值,所以下面式子必须满足

$$\delta \Pi = 0, \quad (5)$$

首先对 u'' 变分,导致下式成立

$$EI_y u'' - P \cdot \Phi \cdot u''(L-z) = 0, \quad (6)$$

把上式代进式(4),整理给出

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L [GJ_d(\Phi')^2 + EI_w(\Phi'')^2 - P^2/EI_y \Phi^2(L-z)^2] dz. \quad (7)$$

再次利用驻值条件式(5)对上式变分

$$\delta \Pi = \int_0^L [EI_w \Phi'' \delta \Phi'' + GJ_d \Phi' \delta \Phi' - P^2/EI_y (L-z)^2 \Phi \delta \Phi] dz = 0. \quad (8)$$

注意到函数的微分运算与变分运算的顺序可以互换,并利用分部积分,上式变为

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \{EI_w \Phi'' \delta \Phi' - [EI_w \Phi''' - GJ_d \Phi'] \delta \Phi\} \Big|_0^L \\ & + \int_0^L [EI_w \Phi''' - GJ_d \Phi' - P^2/EI_y (L-z)^2 \Phi] \delta \Phi \cdot dz = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

由于 $\delta \Phi$ 是任意值,从上式可得到薄壁杆件侧向稳定特征方程和它的两端边界条件

$$\Phi''' - K^2 \Phi' - P^2(L-z)/(E^2 I_y I_w) \Phi = 0, \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi'' = 0 \text{ 或 } \Phi' = \text{Const}, \\ \Phi''' - K^2 \Phi' = 0 \text{ 或 } \Phi = \text{Const}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中 $K^2 = GJ_d/EI_w$ 是薄壁杆件的约束扭转特征系数.

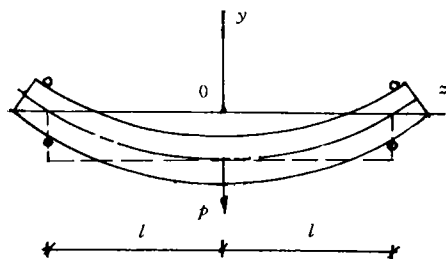


图1 薄壁杆件变形

把式(10)中的 Φ 看成是杆件失稳时对 z 轴新出现的扭转角, 则式(10)就变成随遇平衡方程, P 表示杆件侧向失稳时所承受的横向点荷载, 用 P_c 表示. 引进无量纲因子

$$\xi = (L - z)/L; \quad \lambda^* = P_c/P_e; \quad (P_c)^2 = (E^2 I_z I_w)/L^6,$$

则式(10)可写成

$$\Phi''''(\xi) - K^2 L^2 \Phi''(\xi) - (\lambda^*)^2 \xi^2 \Phi = 0, \quad (12)$$

及相应的边界条件

(a) 在自由端

$$\Phi'' = 0, \quad \Phi''' - K^2 L^2 \Phi' = 0; \quad (13)$$

(b) 在固定端

$$\Phi = 0, \quad \Phi' = 0; \quad (14)$$

(c) 在简支端

$$\Phi = 0, \quad \Phi'' = 0; \quad (15)$$

(d) 在对称位置

$$\Phi' = 0, \quad \Phi''' - K^2 L^2 \Phi' = 0. \quad (16)$$

本文因采用半结构分析, 它的边界条件

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi''(0) = 0, \quad (17)$$

$$\Phi'(1) = 0, \Phi'''(1) - K^2 L^2 \Phi'(1) = 0. \quad (18)$$

2 侧向稳定特征方程的数值解

对于象结构稳定此类复杂的非线性问题, 直接由式(12)求它侧向失稳时临界荷载的闭合解是很困难的. 本文提供一种有效的实用方法, 用 Galerkin 加权余量法求解.

假定稳定的特征问题被定义为

$$M_{2m}(\psi) = \lambda \cdot N_{2n}(\psi) \quad (m > n), \quad (19)$$

在域内 D 的每个边界点上承受 m 个边界条件为

$$A_i(\psi) = 0, \quad (20)$$

$$\bar{A}_i(\psi) = \lambda \cdot \bar{D}_i(\psi), \quad (21)$$

式中 M_{2m} 和 N_{2n} 是线性的、共轭的, 分别为 $2m$ 和 $2n$ 次微分算子. 试函数假设为

$$\psi_r = \sum_j c_j \eta_j \quad (j = 1, 2, \dots, r), \quad (22)$$

式中系数 c_j 是特定系数; η_j 是独立的已知函数, 以及它至少必须满足奇次边界条件式(20).

把试函数代进式(19), 则在域 D 和边界 s 上分别产生的余量为

$$R_1 = -M_{2m}(\psi_r) + \lambda \cdot N_{2n}(\psi_r), \quad (23)$$

$$R_2 = \sum [-\bar{A}_i(\psi_i) + \lambda \cdot \bar{D}_i(\psi_i)], \quad (24)$$

Galerkin 法要求相应于权函数 η_i 的余量权平均满足正交条件^[9], 即

$$\int_D R_1 \eta_j dD + \int_s R_2 \eta_j ds = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, r), \quad (25)$$

这样得到了一组能确定未知参数的代数方程

$$AC = \lambda BC, \quad (26)$$

式中 C 为未知参数 C_j 的向量; A 和 B 是由下列矩阵元素 a_{jk} 和 b_{jk} 组成的方阵

$$a_{jk} = \int_D \eta_j M_{2m}(\eta_k) dD + \sum_j \eta_j \bar{A}_i(\eta_k) ds; \quad (27)$$

$$b_{jk} = \int_D \eta_j N_{2n}(\eta_k) dD + \sum_j \eta_j \bar{D}_i(\eta_k) ds. \quad (28)$$

对于一个共轭的特征值问题,矩阵 A 和 B 是对称. 进一步说,若算子 M_{2m} 和 N_{2n} 分别是正的,那末矩阵 A 和 B 具有正定对称的形式.

本文广义坐标选择为三角函数的形式,即

$$\eta_j = \sin m\pi\xi/2 \quad (m = 2j - 1),$$

它显然满足齐次的边界条件 $\Phi(0)=0$ 和 $\Phi'(1)=0$; 这样,式(12)的解能够被表达式 Fourier 展开式

$$\Phi(\xi) = \psi_r = \sum_r C_j \eta_j = \sum_r C_j \sin m\pi\xi/2 \quad (m = 2j - 1, j = 1, 2, \dots, r); \quad (29)$$

把式(12)按式(19)改写

$$M_4(\Phi) = \lambda \cdot N_0(\Phi), \quad \bar{A}_0(0) = \lambda \cdot \bar{D}_0(0), \quad \bar{A}_1(1) = \lambda \cdot \bar{D}_1(1) \quad (30)$$

式中 $M_4(\Phi) = \Phi'''(\xi) - K^2 L^2 \Phi''(\xi), \quad N_0(\Phi) = \xi^2 \Phi(\xi),$

$$\bar{A}_0 = \Phi''(0), \quad \bar{D}_0(0) = 0,$$

$$\bar{A}_1(1) = \Phi'''(1) - K^2 L^2 \Phi'(1), \quad \bar{D}_1(1) = 0,$$

把式(29)代进式(27)和(28),则

$$a_{jk} = \int_0^L \eta_j M_4(\eta_k) d\xi + \sum_{\xi=0} \eta_j \bar{A}_\xi(\eta_k), \quad (31)$$

$$b_{jk} = \int_0^L \eta_j N_0(\eta_k) d\xi + \sum_{\xi=0} \eta_j \bar{D}_\xi(\eta_k). \quad (32)$$

据式(26),薄壁杆件侧向失稳的临界点荷载特征值作为满足下式的一个最小正根被求得

$$\det |A - \lambda \cdot B| = 0, \quad (33)$$

再利用下式的正交条件

$$\int_0^L \eta_j(\xi) \cdot \eta_k(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \delta_{jk}, \quad (34)$$

则式(31)能被表达为

$$\begin{aligned} a_{jk} = & \int_0^L \sin m\pi\xi/2 [n^4 \pi^4 / 2^4 \sin n\pi\xi/2 + K^2 L^2 n^2 \pi^2 / 2^2 \sin n\pi\xi/2] d\xi \\ & + \sin m\pi\xi/2 [(-n^3 \pi^3 / 2^3 \cos n\pi\xi/2) - K^2 L^2 n\pi/2 \cos n\pi\xi/2] |_{\xi=1} \\ & + \sin m\pi\xi/2 (-n^2 \pi^2 / 2^2 \sin n\pi\xi/2) |_{\xi=0}, \end{aligned} \quad (35)$$

即

$$a_{jk} = 0 \quad j \neq k, \quad (36)$$

$$a_{jk} = (m^4 \pi^4 / 2^4 + K^2 L^2 m^2 \pi^2 / 2^2 / 2) \quad j = k, \quad (37)$$

式中 $m=2j-1, n=2k-1$.

这样矩阵 A 是一个对角阵. 照此办理可得到

$$b_{jk} = 1/6 + 1/(m^2 \pi^2), \quad j = k, \quad (38)$$

$$b_{jk} = 2^2 [(-1)^{1/2(m-n)} / (m-n)^2 - (-1)^{1/2(m+n)} / (m+n)^2] / \pi^2, \quad j \neq k, \quad (39)$$

这样,薄壁杆件侧向稳定特征方程被解,临界荷载特征值 λ 随之被求出.

3 解的收敛性

如上所述,用 Galerkin 加权余量法求解薄壁杆件侧向稳定特征方程时,它的屈曲模态被表达为三角级数的形式.一般地说,这个试函数的范围及特定参数的数目增加时,近似解的精度会提高.表 1 列出取不同的级数项对薄壁杆件侧向失稳时临界点荷载的影响.

表 1 取不同级数项对横向临界点荷载 P_{cr} 的影响^①

试件名称	取前一项	取前二项	取前三项
SI0RA	681.024 606	681.024 406	681.024 403
SI1RC	673.347 936	673.347 732	673.347 729
SI1RF	677.220 732	677.220 530	677.220 526
SI3RA	659.748 845	659.748 634	659.758 631
SI3RB	670.908 034	670.907 829	670.907 826
SI6RA	644.038 560	644.038 341	644.038 337
SI6RB	664.282 858*	664.282 750	664.282 746
SI3CA	677.909 030	677.908 828	677.908 824
SI3CB	679.648 759	679.648 558	679.648 555

①表中数值来自下节例子

从表 1 可以看出,无论试函数取前一项,或前二项,还是前三项,对这些临界荷载值几乎没有影响.因此,在进行薄壁杆件侧向稳定分析时,仅仅取级数的第一项就足够了.也就是 $m=1$, 则式(33)能被简化为

$$(\lambda^*)^2 = a_{11}/b_{11}, \tag{40}$$

所以在薄壁杆件实际工程设计中,应用本方法是非常简便的.

4 与试验结果比较

下面的例子引自文[7].简支工字型梁长度 $2L$ 是 940 mm;腹板的厚度 t_w 和高度 d 分别是 6 mm 和 75 mm;翼缘的厚度 t_f 和宽 b 分别是 10 mm 和 23.5 mm.在半跨中有六处可能出现洞口的位置,如图 2 所示.

从支座起到跨中对洞口可能出现位置进行编号.洞口可能是矩形、或是圆形.它们的位置和尺寸可以变化.为了便于与文[7]的试验结果进行比较,只研究下面五种情况:(1) 无孔洞;(2) 一个矩形孔洞;(3) 三个矩形孔洞;(4) 六个矩形孔洞;(5) 三个园形孔洞.

对于第二,三和四种情况,分别考虑 62.5 mm×50 mm 和 62.5 mm×25 mm

二种不同的孔洞尺寸;对于第五种情况,也分别考虑 38 mm 和 25 mm 二种不同的孔洞直径.

试件是用有机玻璃制成的,弹性模量取 $2\,860\text{ N}\cdot\text{cm}^{-2}$,Poisson 比取 0.36.因为洞口出现能被粗略作为腹板有效厚度的减少,一般采用折算厚度的方法来考虑开洞后刚度的折减.由于

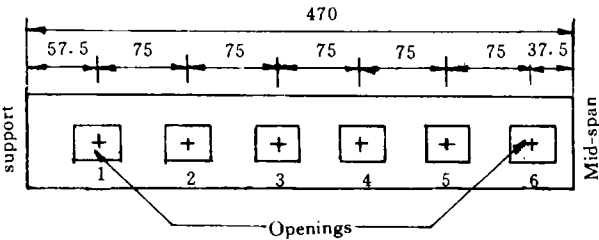


图 2 开洞的位置

开洞引起的刚度折减系数^[10]

$$\alpha_1 = (1 - b_0/d) + [1 - Na_0/(2L)]^3 b_0/d, \tag{41}$$

式中 N 是矩形洞口的数目, a_0 和 b_0 分别是洞口的宽度和深度, 以及 d 是整个腹板的高度; $2L$ 是杆件的跨度.

对于带有园孔的薄壁杆件, 一个简单的方法是用一个正的八边形孔洞来代替此园形洞口, 则刚度拆减系数为^[10]

$$\alpha_2 = (1 - D_0/d) + 0.172[ND_0^2/(d \ 2L)] + (D_0/d)[1 - N \ D_0/(2L)], \tag{42}$$

式中 D_0 为外接正八边形园的直径.

对于工字型梁^[8]

$$EI_y = E/12 \ [2b^3t_l + \alpha_i \ d \ (t_w)^3], \tag{43a}$$

$$GJ_d = G/3 \ [2K_l b(t_l)^3 + \alpha_i \ K_w \ d(t_w)^3], \tag{43b}$$

$$EI_w = E/24 \ [t_l b^3(d + t_l)^2], \tag{43c}$$

式中 i 对应于方洞或园洞取 1 或者 2, E 是 Young 氏横量 G 是剪切横量.

$$K_l = 1 - 0.63 \cdot t_l/b,$$

$$K_w = 1 - 0.63 \cdot t_w/d,$$

把用本文方法算出侧向失稳时临界点荷载的值与文[7]的试验结果进行比较见表 2.

表 2 不同结果的比较

试件名称	$a_0 \times b_0$ (mm × mm)	洞口位置	试验的 P_{cr}	本文的 P_{cr1}	P_{cr1}/P_{cr}
SI0RA	—	—	707.8	681.0	0.962
SI1RC	62.5 × 50.0	6	688.7	673.3	0.978
SI1RF	62.5 × 25.0	6	698.7	677.2	0.969
SI3RA	62.5 × 50.0	1,3,6	667.1	659.7	0.989
SI3RB	62.5 × 25.0	1,3,6	684.7	670.9	0.980
SI6RA	62.5 × 50.0	1~6	637.7	644.0	1.010
SI6RB	62.5 × 25.0	1~6	674.9	664.3	0.984
SI3CA	$D=38.0$	1,3,6	696.5	677.9	0.973
SI3CB	$D=25.0$	1,3,6	700.9	679.6	0.970

从表 2 可以看出, 用 Galerkin 加权余量法得到工字型梁在侧向失稳时的临界点荷载值在所有九种情况下都非常接近文[7]中的试验结果, 相对差值全都在 3.8% 以下.

5 结论

根据本文研究可得出下面一些有用的结论:

(a) 根据能量原理, 借助于变分法导出一个考虑薄壁杆件扭转和翘曲变形影响的侧向稳定特征方程. 利用 Galerkin 加权余量法计算简支跨中受点荷载的开洞薄壁杆件的临界荷载;

(b) 用本文的方法得到的临界荷载值与试验结果比较吻合得很好, 说明用本方法能有效计算开洞薄壁杆件的临界荷载值;

(c) 本文计算结果的快速收敛说明本文方法的数值稳定性;

(d) 用本文方法得到计算侧向失稳时的临界荷载公式是非常简单. 这样, 把一个复杂的工程实际问题转化成为一个仅仅解一个变量线性方程的简单问题.

参 考 文 献

- 1 Barsoum R S, Gallagher R H. Finite element analysis of torsional and torsional-flexural stability problems. *Internat. J. for Numerical Methods in Engrg.*, 1970, 2(3): 110~114
- 2 Krajcinovic D. A consisted discrete element technique for thin-walled assemblages. *Internat. J. of Solid and Structures*, 1969, 5(7): 465~470
- 3 Jonson C P, Will K M. Beam buckling by finite element procedure. *J. of the Struct. Div., ASCE*, 1974, 100(3): 669~685
- 4 Vlasov V Z. Thin-walled elastic beams: 2nd Ed., Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem, Israel, 1961. 22~230
- 5 Timoshenko S P, Gere J M. Theory of elastic stability 2nd Ed., New York: McGraw-Hill Book Co., 1961. 55~2124
- 6 Pandey M D, Sherbourne N S. Elastic, lateral-torsional stability of beams: general considerations. *J. of Struct. Engrg.*, ASCE, 1990, 116(2): 317~335
- 7 Thevendran V, Shanmugam N E. Lateral buckling of doubly symmetric beams containing openings. *J. of Engrg. Mech.*, ASCE 1991, 117(7): 1 427~1 441
- 8 Timoshenko S P, Gooder J N. Theory of elasticity. New York: McGraw-Hill Book Co., 1951. 1~116
- 9 Crandall S. Engineering analysis. New York: McGraw Hill Book Co., 1956. 1~65
- 10 Coull A, Alvarez M C. Effect of openings on lateral buckling of beams. *J. of the Struct. Div., ASCE*, 1980, 106(2): 2 553~2 560

Lateral Stability of Thin-Walled Bar with Openings

Wang Quanfeng

(Dept. of Civil Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract For a thin-walled bar with openings, a characteristic equation of lateral stability is derived from energy principle and with the aid of variational method. In the equation, the effects of torsion and warping are being taken into account. The critical load of this simply supported and cut across midpoint loading thin-walled bar with openings is calculated by Galerkin's method of weighted residuals. The numerical results obtained closely agree to the test results. The numerical stability of the author's method can be explained by the rapid convergence of calculated results in the paper. A complex practical issue in engineering is thus transformed into a simple one, which needs to solve only one linear equation with one variable.

Keywords lateral stability, thin-walled bar, weighted residuals